

# sPHENIX実験-INTT検出器のための 衝突点測定方法の開発

2024.03.05 卒業研究発表会

奈良女子大学 高エネルギー物理学研究室

池本 真尋

# 目次

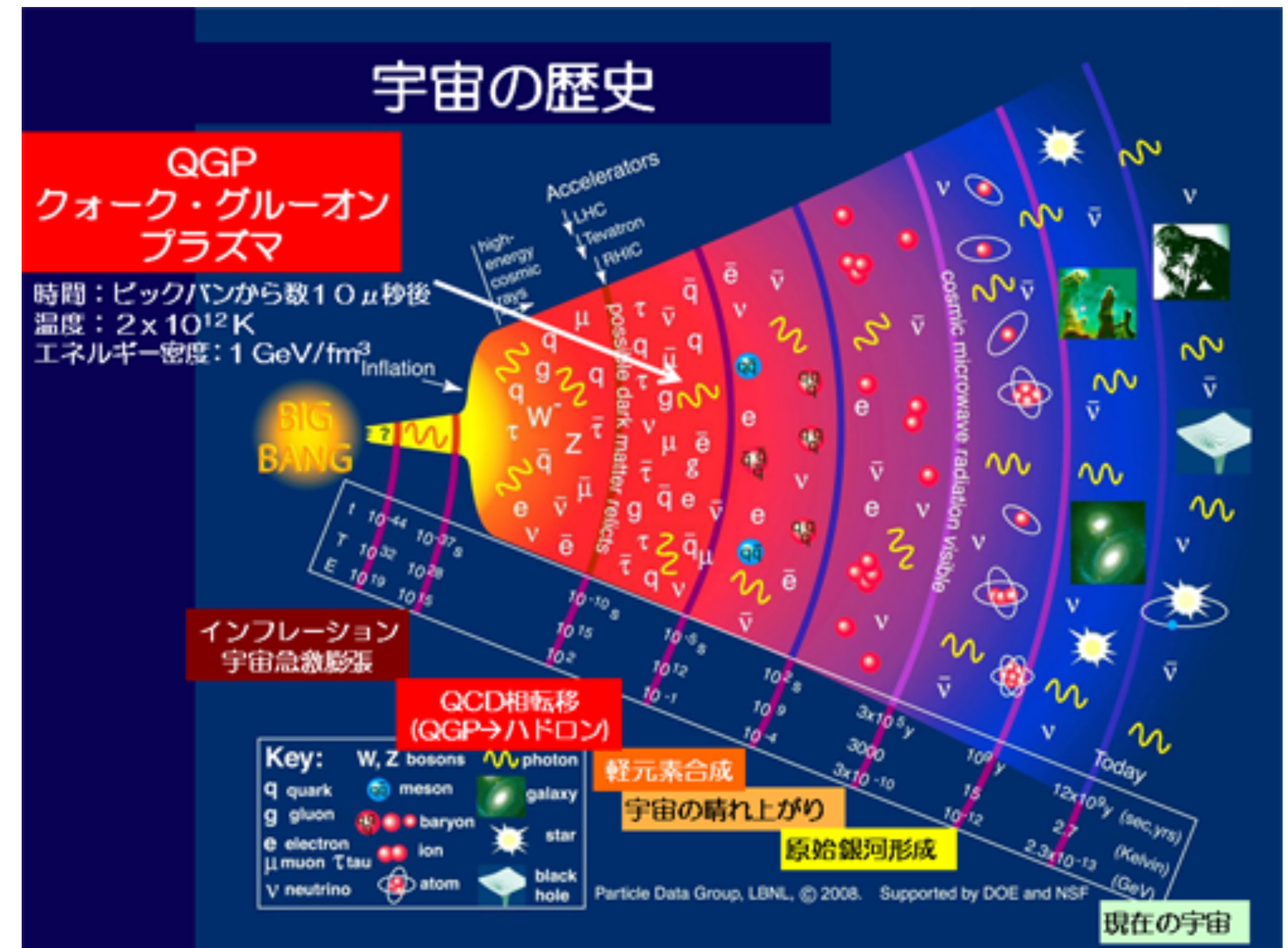
1. 研究背景
2. 研究目的
3. 研究方法
4. 研究結果
5. まとめ、今後の課題

# 1. 研究背景

# 研究背景：クォーク・グルーオン・プラズマ(QGP)

- 通常、強い相互作用により核子内に閉じ込められているクォークやグルーオンが、高温高密度状態で解放されている状態
- ビッグバンから数十 $\mu$ 秒後に存在したとされている

QGPの解明が宇宙の初期状態の解明につながる



# 研究背景：sPHENIX実験

## sPHENIX実験

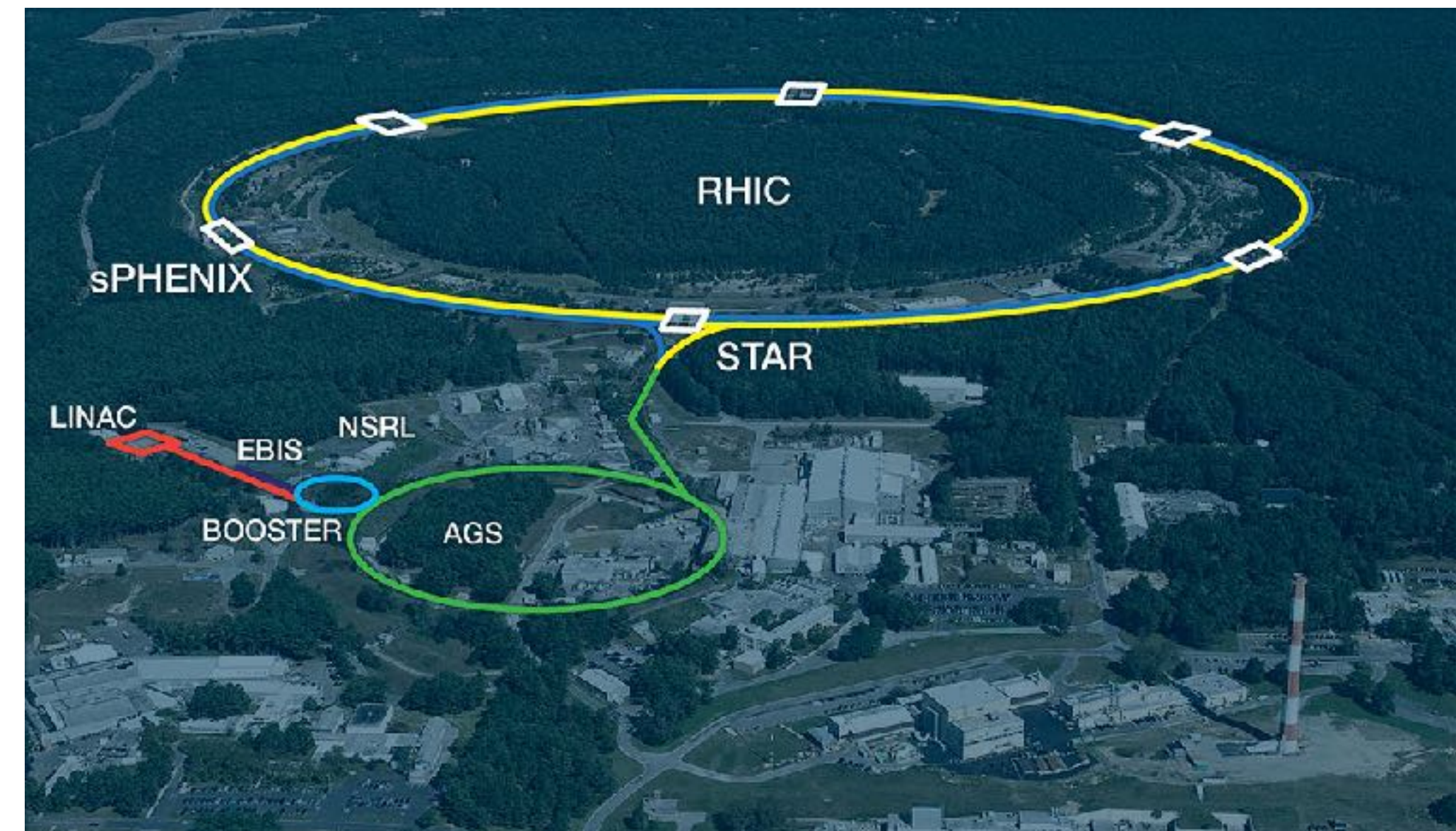
- 米国ブルックヘブン国立研究所(BNL)  
重イオン衝突型加速器RHICを用いた実験。  
2000~2016年に行われたPHENIX実験を高度化。2023年から稼働中

## 実験目的

- QGPの生成とその性質の解明  
衝突で生じるJet現象やUpsilon粒子を測定

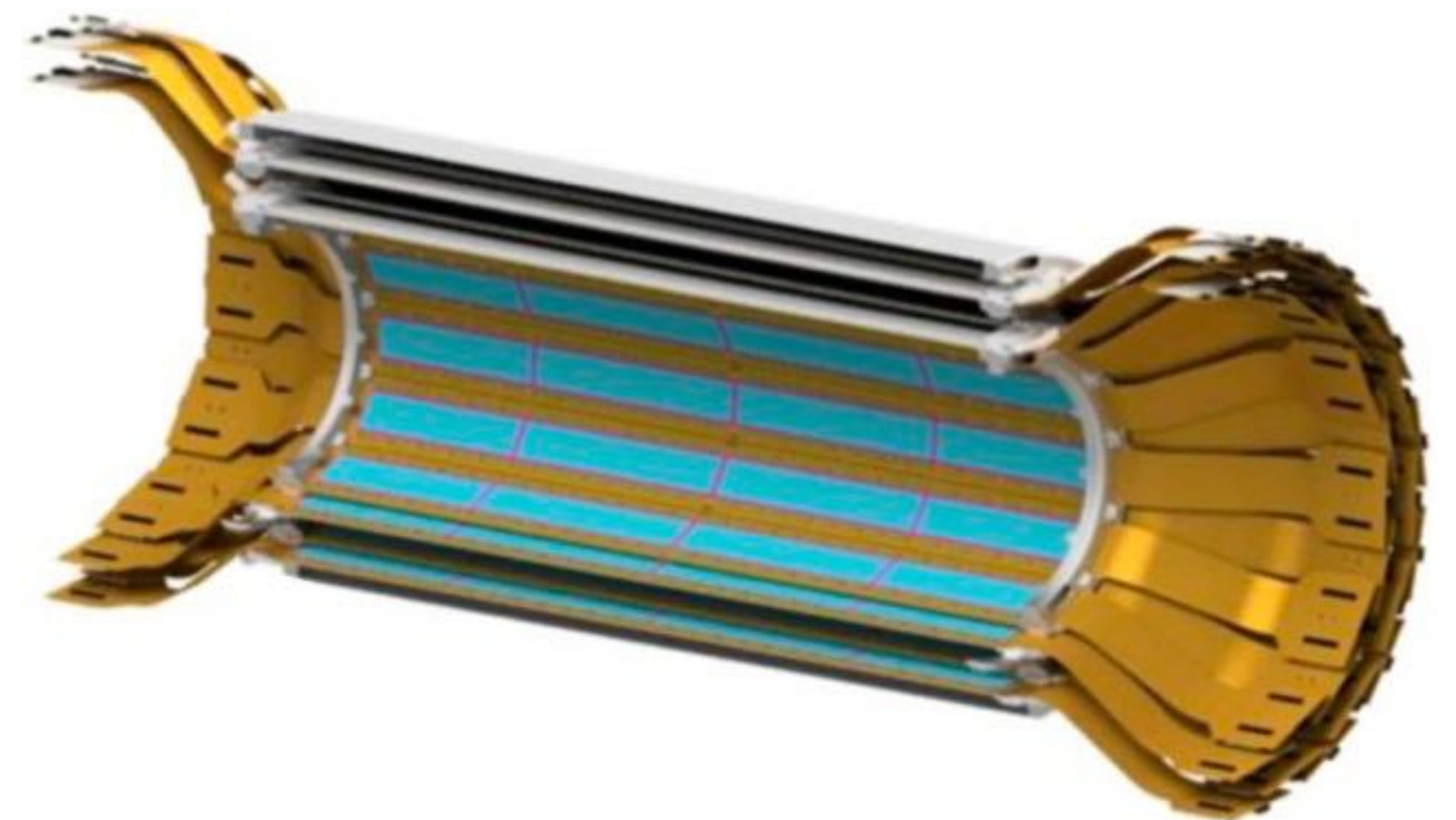
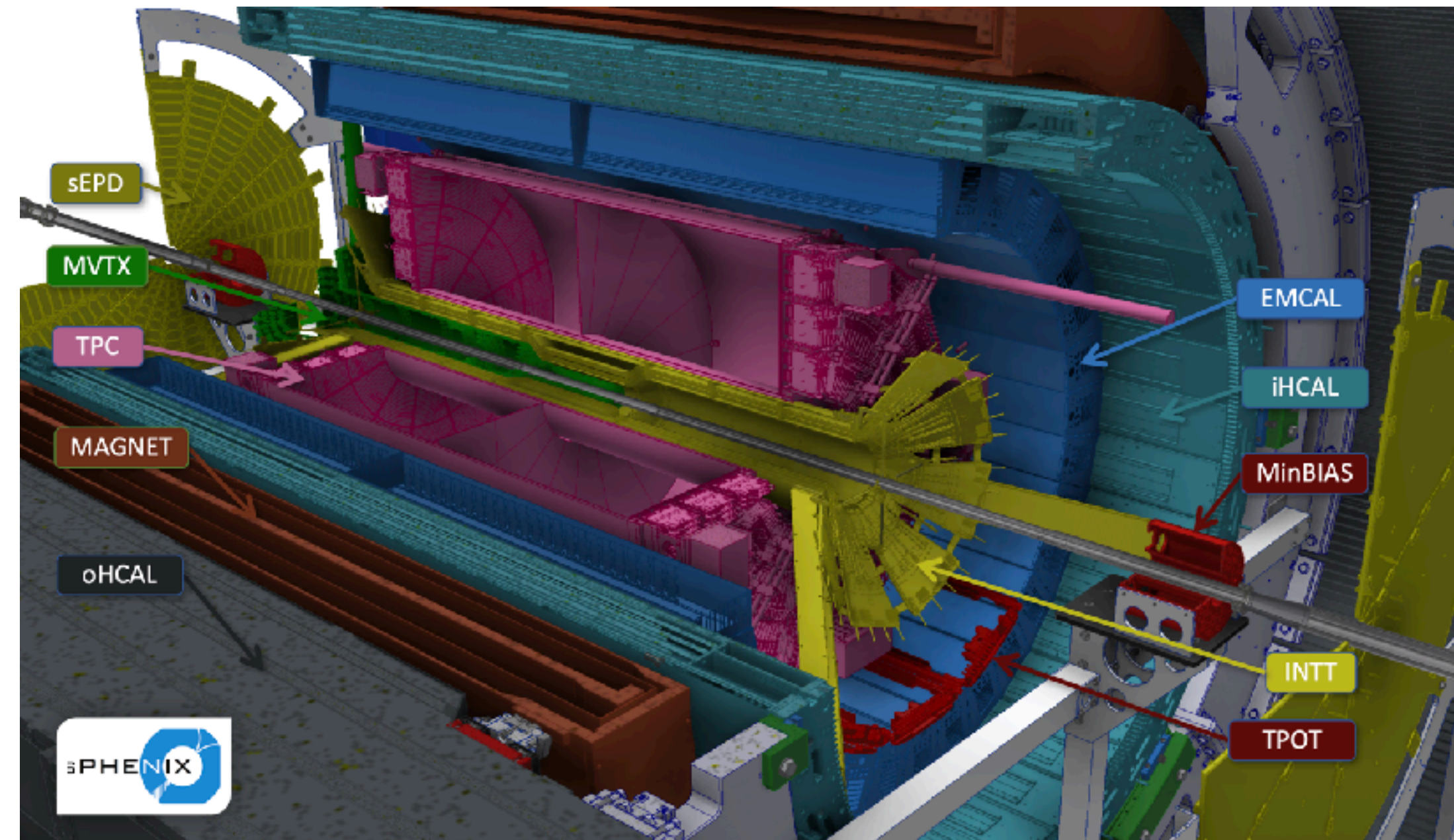
## 衝突核子

- 金原子核対(200GeV)、陽子対(200GeV)



# 中間飛跡検出器INTT (INtermediate Tracker)

- sPHENIX実験で用いられる3つの飛跡検出器のうちの1つ
- 樽状の二層構造のストリップ型シリコン検出器
- ビームパイプから7~10cmに位置
- 時間分解能が高く、飛跡再構成において重要な役割をもつ



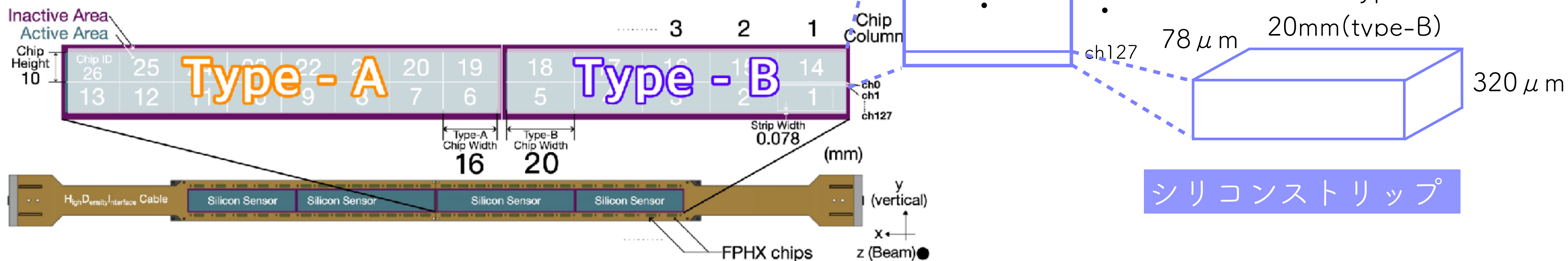
# INTTシリコンセンサー

## シリコンセンサー

- 幅 $78\mu\text{m}$ 、長さ $16\text{mm}$ ( $20\text{mm}$ )、厚さ $320\mu\text{m}$ のストリップ128本
- Type-A( $16\text{mm}$ )とType-B( $20\text{mm}$ )の二種類

## シリコンセンサーモジュール

- 26個のシリコンセンサー、読み出しチップ
- モジュール2つで1センサーラダー
- 56本のラダーで二層の検出器を構成



## 2. 研究目的



# 研究目的

課題：z方向の衝突点をより精度良く求める

## なぜ衝突点を求めなければならないのか

- 検出効率の評価

粒子の衝突点の位置や検出器内の通過位置による検出効率の影響を考慮するために、検出器の効率を評価する必要がある。衝突点の位置に基づいてデータを分割し、場所ごとに検出効率を見積もる

- 中性粒子の測定

中性粒子は電荷を持たないため、飛跡検出器では測定できない。  
そのため、中性粒子の方向は、衝突点とカロリメータ（エネルギー測定器）のヒット位置を使用して決定される

⇒これらの目的のため、衝突点を求める必要がある

# 研究目的

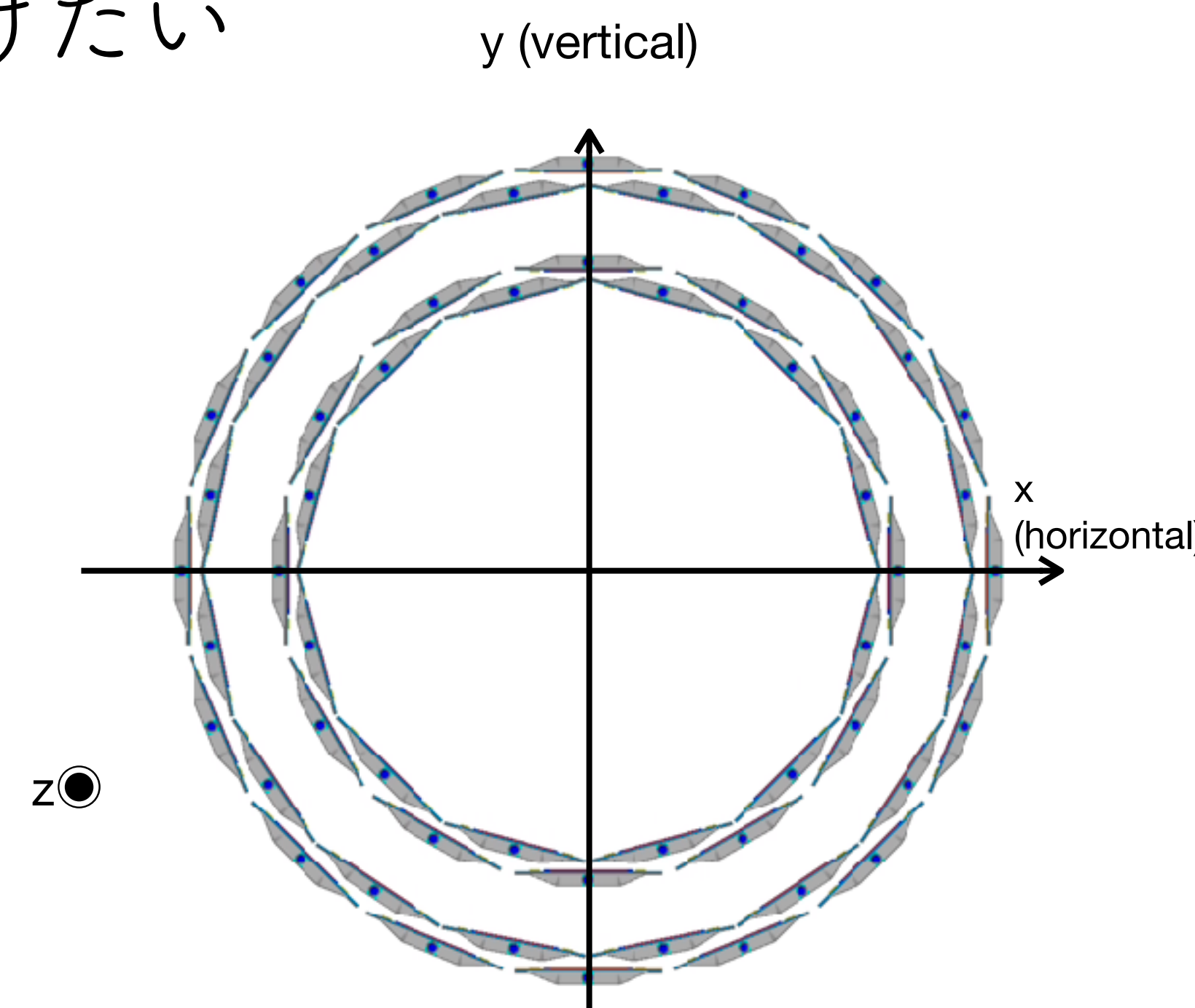
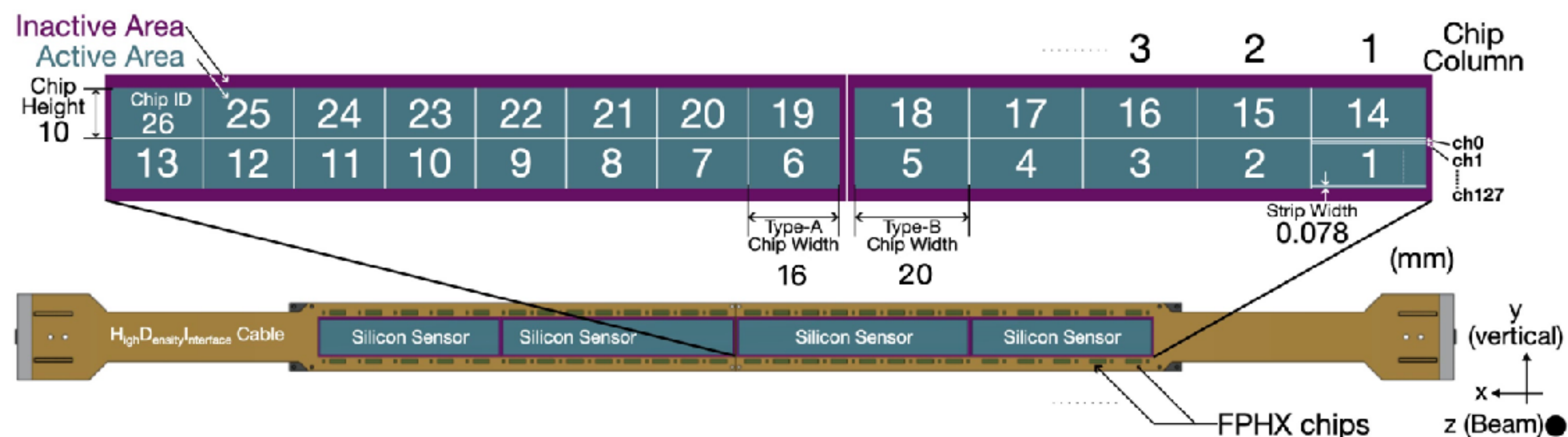
課題：z方向の衝突点をより精度良く求める

なぜz方向の衝突点を精度良く求める必要があるのか

78  $\mu\text{m}$ のセンサーで構成されているx,y軸方向に比べて、16mmもしくは20mmのchipで構成されているz軸方向は分解能が悪い

⇒再構成されたz軸方向の衝突点(vertex)の精度を上げたい

精度良く衝突点を求められる方法を開発する必要



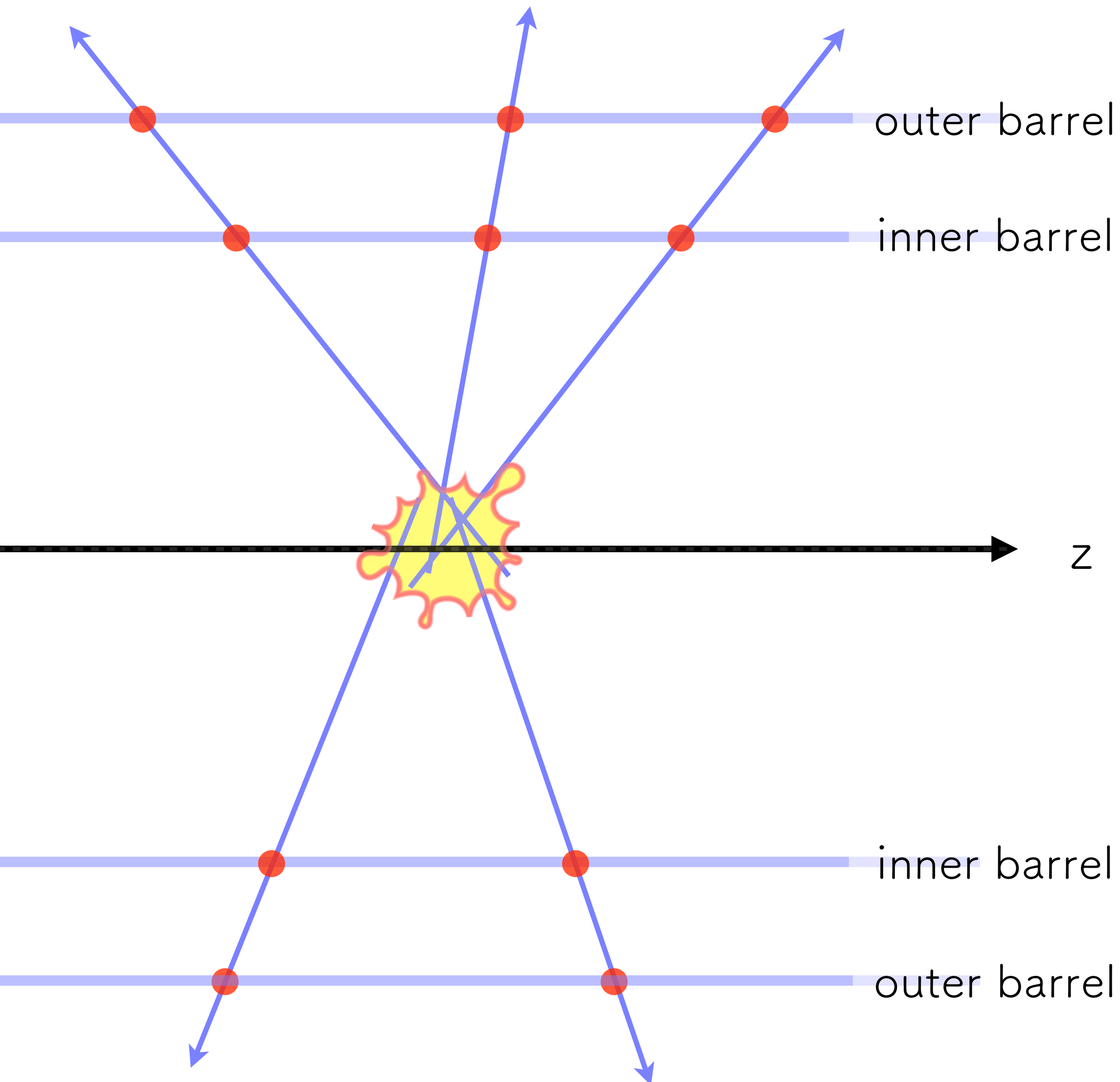
# 3. 研究方法

# 研究概要

1. 以下の方法で1イベントごとにz軸方向の衝突点( $z_{\text{vertex}}$ )を計算
  - 平均法
  - ピーク法
  - カットをかけた範囲内での平均法
  - 加重平均法
2. それぞれの方法で分解能を比較し、最適な方法を決定する

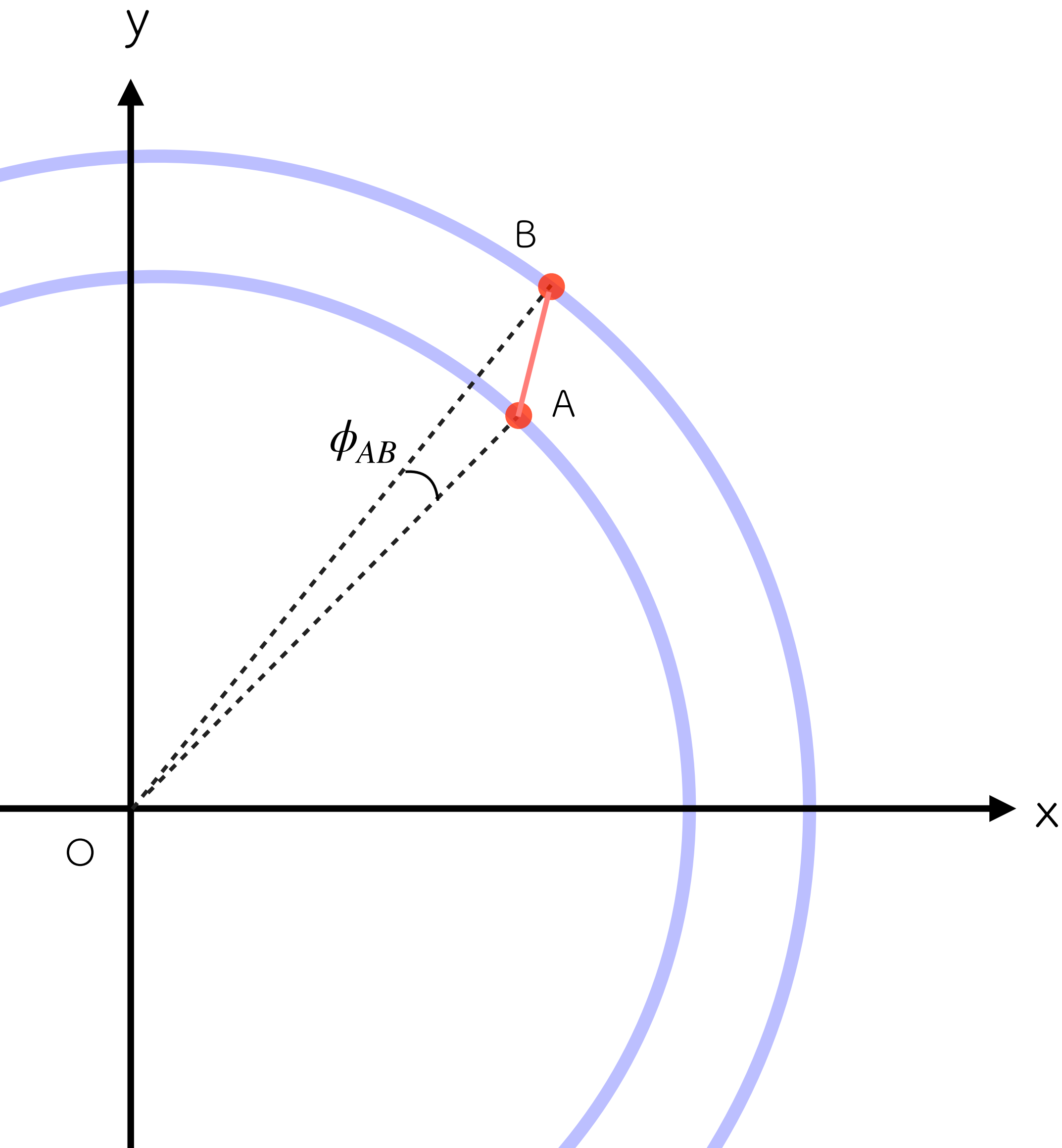
使用データ：陽子陽子衝突、磁場なしシミュレーションデータ(Pythia (8.307))  
 $x_{\text{vertex}}=0$ 、 $y_{\text{vertex}}=0$ 、 $z_{\text{vertex}}$ の $\sigma=20\text{cm}$ 、イベント数10000

# 衝突点の再構成



1. 内層(inner barrel)、外層(outer barrel)それぞれのヒット位置を決める
2. ヒット位置を繋いだ線から、 $x=0, y=0$ の線に対する最近接距離(DCA<sub>z</sub>)を求め、最近接距離にある点(DCA<sub>z</sub>座標)を求める
3. 1イベント中に複数あるDCA<sub>z</sub>座標から、もっともらしい点を衝突点と決める

# トラックレットの生成

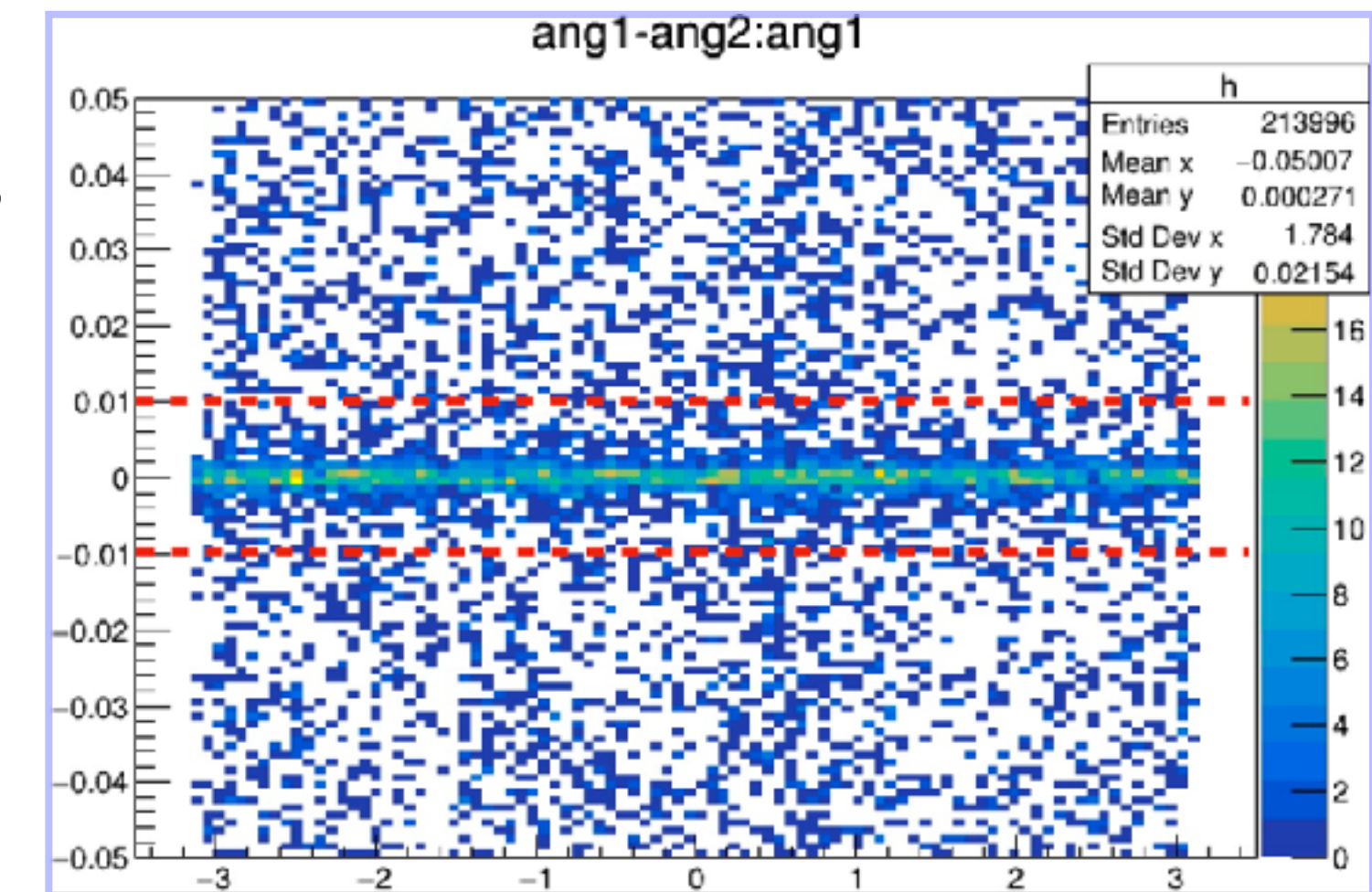


1.  $x,y$ 平面上でヒットAとヒットBのペア (トラックレット)を決める

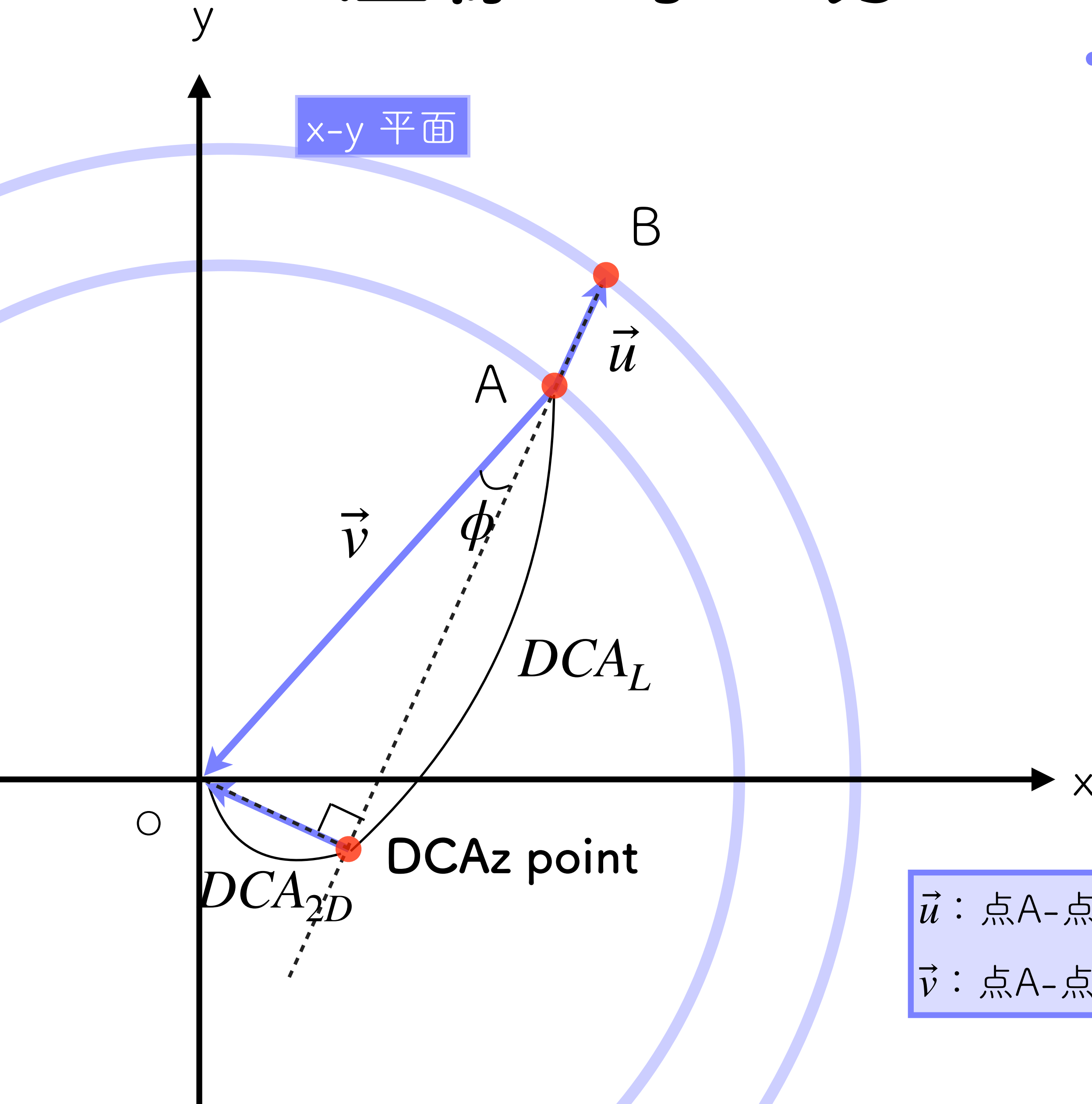
ペアを選ぶ条件

内層上のヒットAの角度差  $|\Delta\phi_{AB}| < 0.01[\text{rad}]$  の  
外層上のヒットBを選ぶ

2. トラックレットから  
衝突点を求める



# DCAz座標の求め方



- トラックレットと原点間の最接近距離(DCA)を計算する

—DCA座標とAの距離( $DCA_L$ )、

DCA座標と原点の距離( $DCA_{2D}$ )を計算する

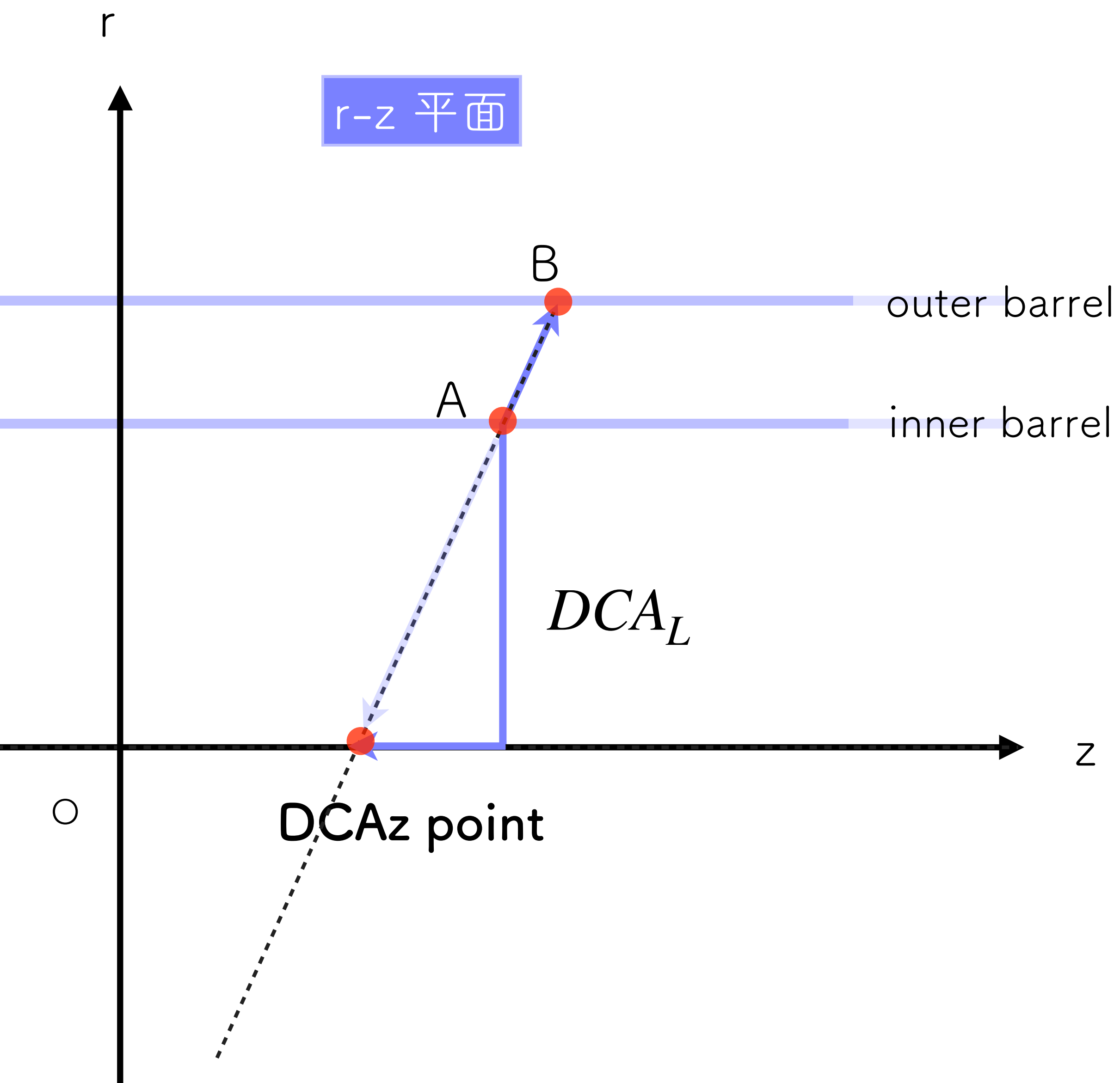
$$DCA_L = \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \cos \phi$$

$$DCA_{2D} = \vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \cdot \sin \phi$$

$\vec{u}$  : 点A-点B間の単位ベクトル

$\vec{v}$  : 点A-点O間のベクトル

# DCAz座標の求め方



- トラックレットと原点間の最接近距離(DCA)を計算する

— DCA座標とAの距離( $DCA_L$ )、

DCA座標と原点の距離( $DCA_{2D}$ )を計算する

$$DCA_L = \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \cos \phi$$

$$DCA_{2D} = \vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \cdot \sin \phi$$

- $DCA_L$ を用いて、DCAz座標を計算する

$$DCA_Z = DCA_L \times \vec{u}_Z + A_Z$$



# 3. 研究結果

# 研究概要

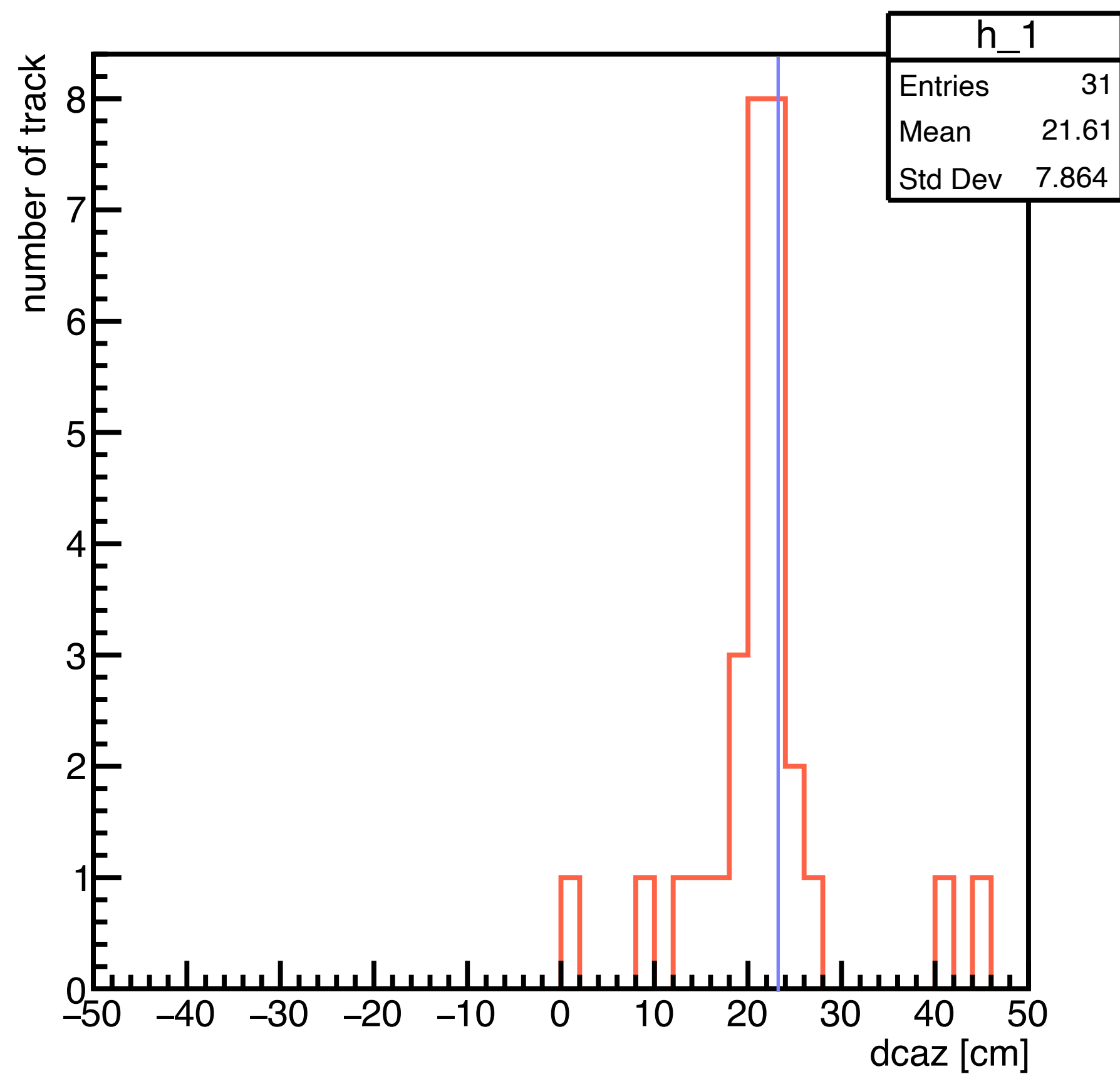
1. 以下の方法で1イベントごとにz軸方向の衝突点( $z_{\text{vertex}}$ )を計算
  - 平均法
  - ピーク法
  - カットをかけた範囲内での平均法
  - 加重平均法
2. それぞれの方法で分解能を比較し、最適な方法を決定する

使用データ：陽子陽子衝突、磁場なしシミュレーションデータ(Pythia (8.307))  
 $x_{\text{vertex}}=0$ 、 $y_{\text{vertex}}=0$ 、 $z_{\text{vertex}}$ の $\sigma=20\text{cm}$ 、イベント数10000

# DCAz座標プロットの平均値をz\_vertexとする方法

1イベントのDCAz座標プロット

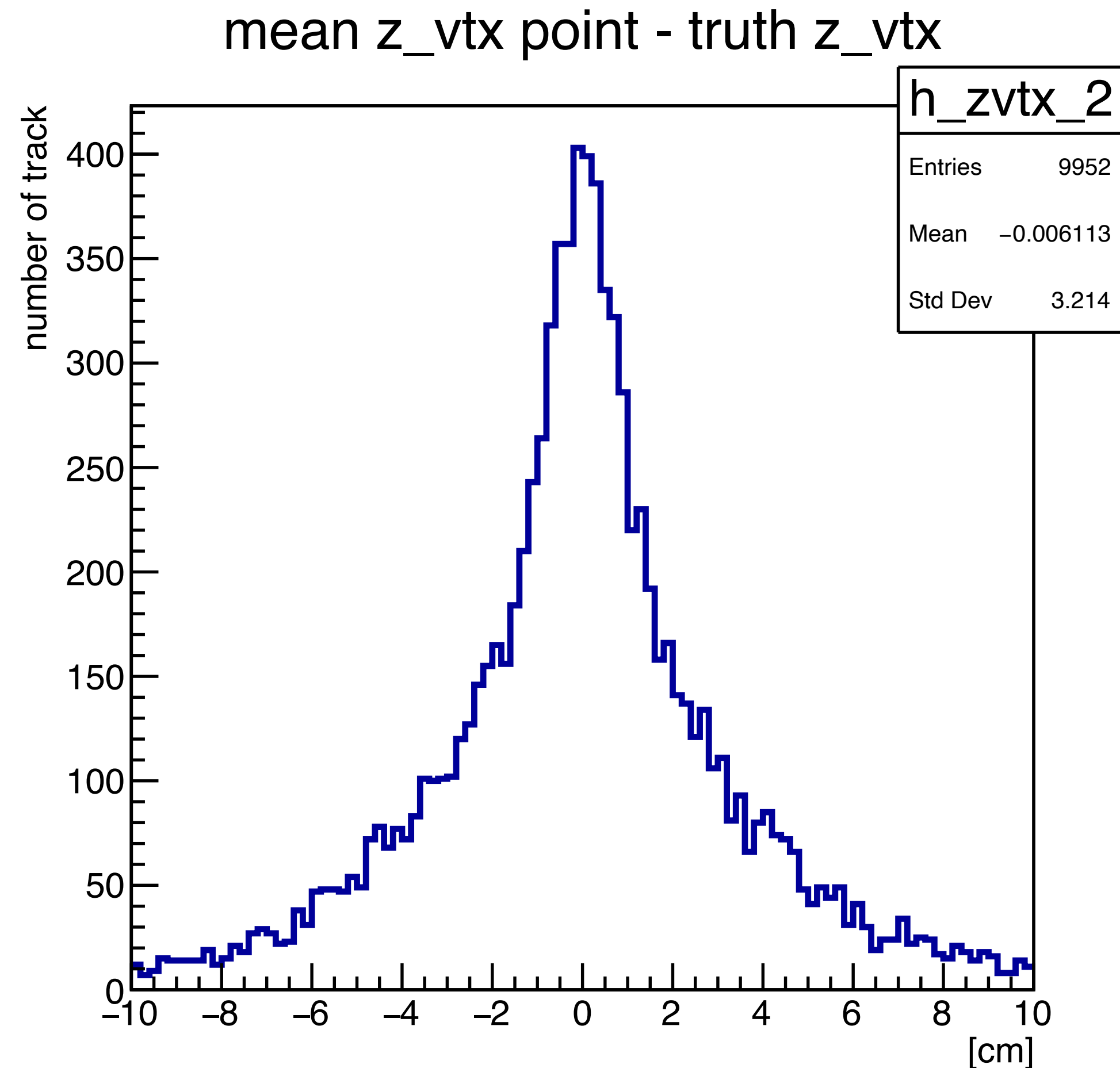
dcaz distribution



- 1イベントごとにDCAz座標の分布を作成し、平均値を計算  
⇒求めた平均値をz\_vertexと考える
- 全イベントで同様に分布を作成し、z\_vertexを計算する

# DCAz座標プロットの平均値をz\_vertexとする方法

全イベントのz\_vertexとtruthのz\_vertexの差分布



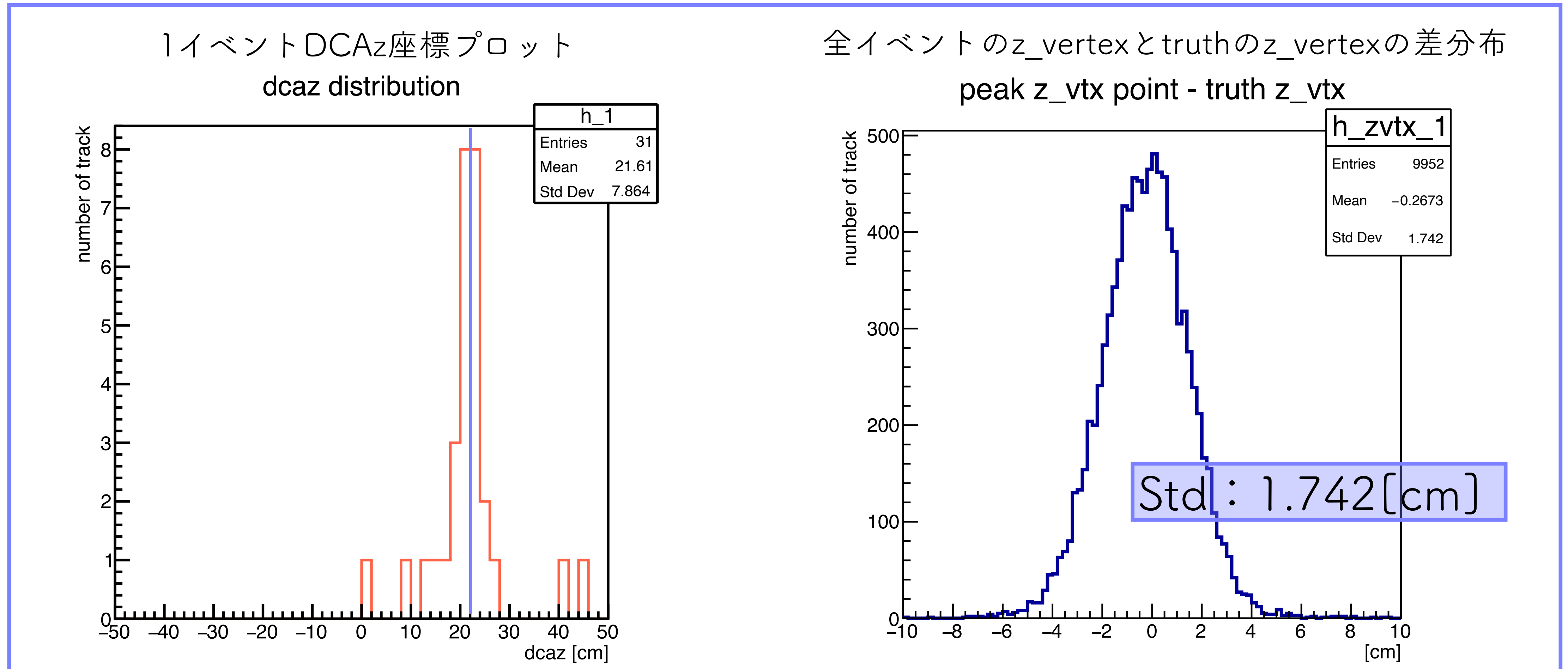
- 平均法で求めたz\_vertexと、シミュレーションデータのz\_vertexの真値(truthのz\_vertex)の差を全イベント分プロット
- z\_vertexとtruthのz\_vertexの差分をプロットすることで、計算したz\_vertex値の正確さがわかる  
正確であればあるほど値は0に近づくので、ヒストグラムが細くなる
- ここでの標準偏差(std)の値が分解能となる

Std : 3.214[cm]

# DCAz座標プロットのピーク位置をz\_vertexとする方法

1イベントごとにDCAz座標の分布を作成し、ヒストグラムのピーク位置を計算

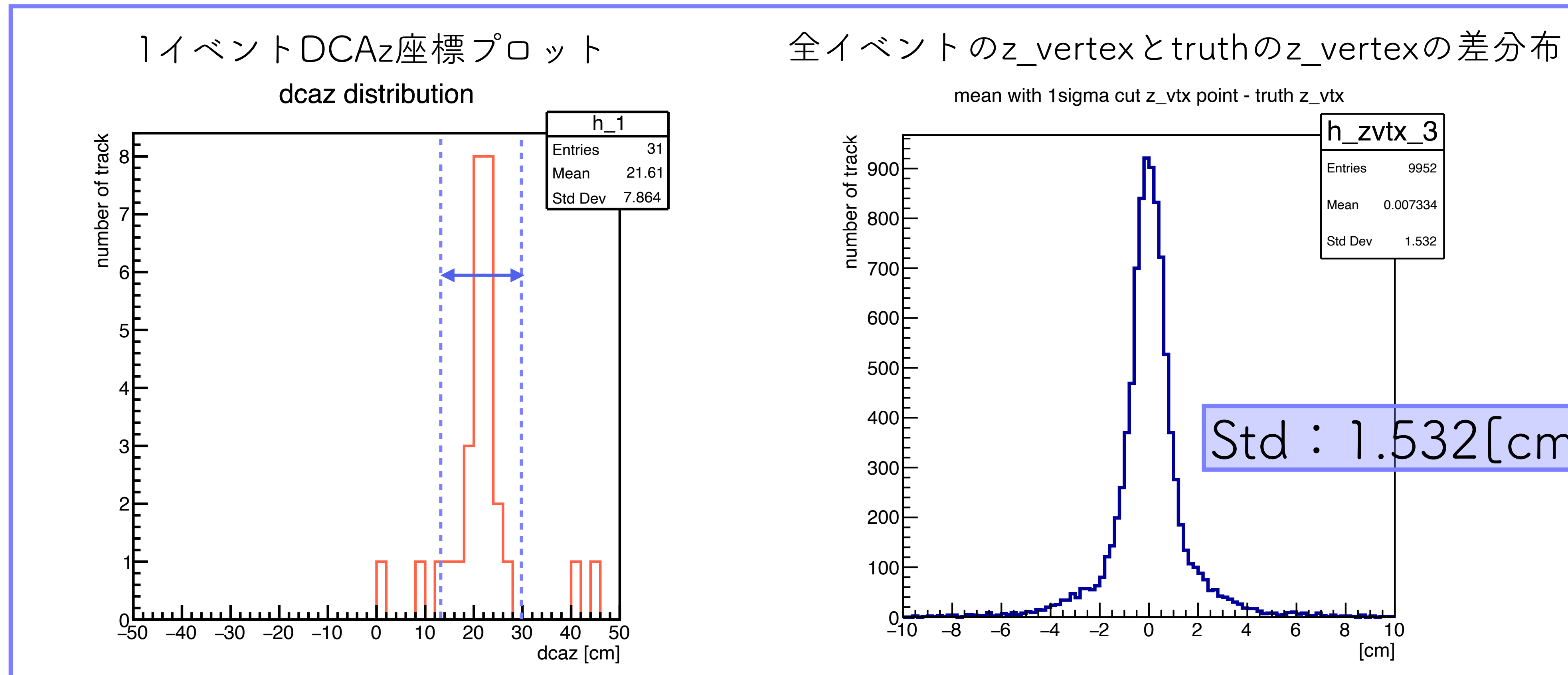
⇒求めたピーク位置をz\_vertexと考える



分解能となるStd値は1.742[cm]となった

# 1シグマの範囲内でのDCAz座標の平均値をz\_vertexとする方法

離れた位置にあるデータを入れずに平均を計算すると、より良い分解能を得られるのではないか  
⇒1シグマの範囲内にあるデータだけを使って求めた平均値をz\_vertexと考える

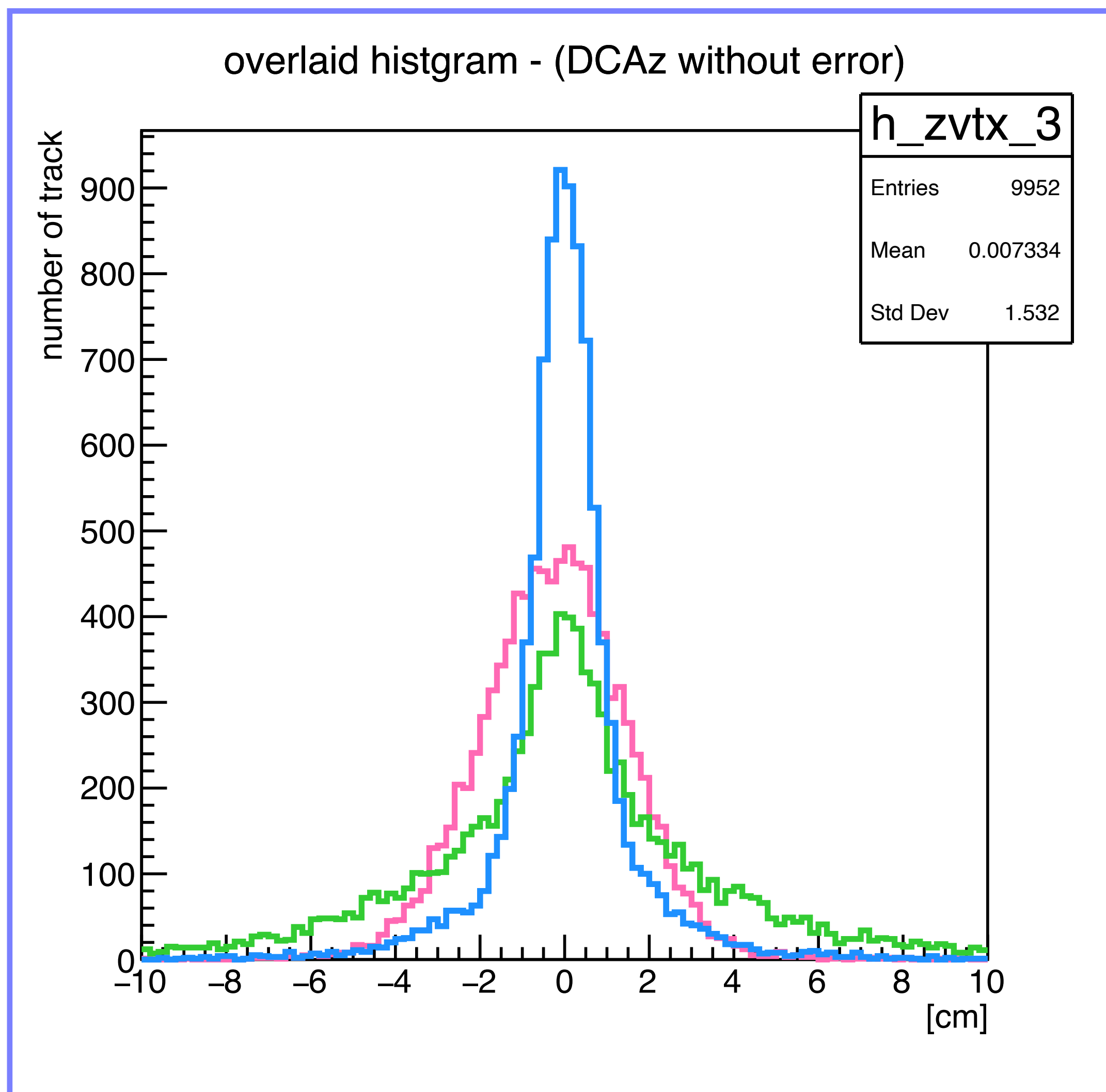


全範囲での平均法のStd(3.214[cm])より良い値が得られた

→平均法を使用する場合は範囲のカットをかけたほうが精度が良い

# z\_vertexのプロットの比較

平均法、ピーク法、カットをかけた平均法、3種類方法から求めたz\_vertexのプロットを重ねて比較



	Std値[cm]
平均法	3.214
ピーク法	1.742
1σカットをかけた平均法	1.532

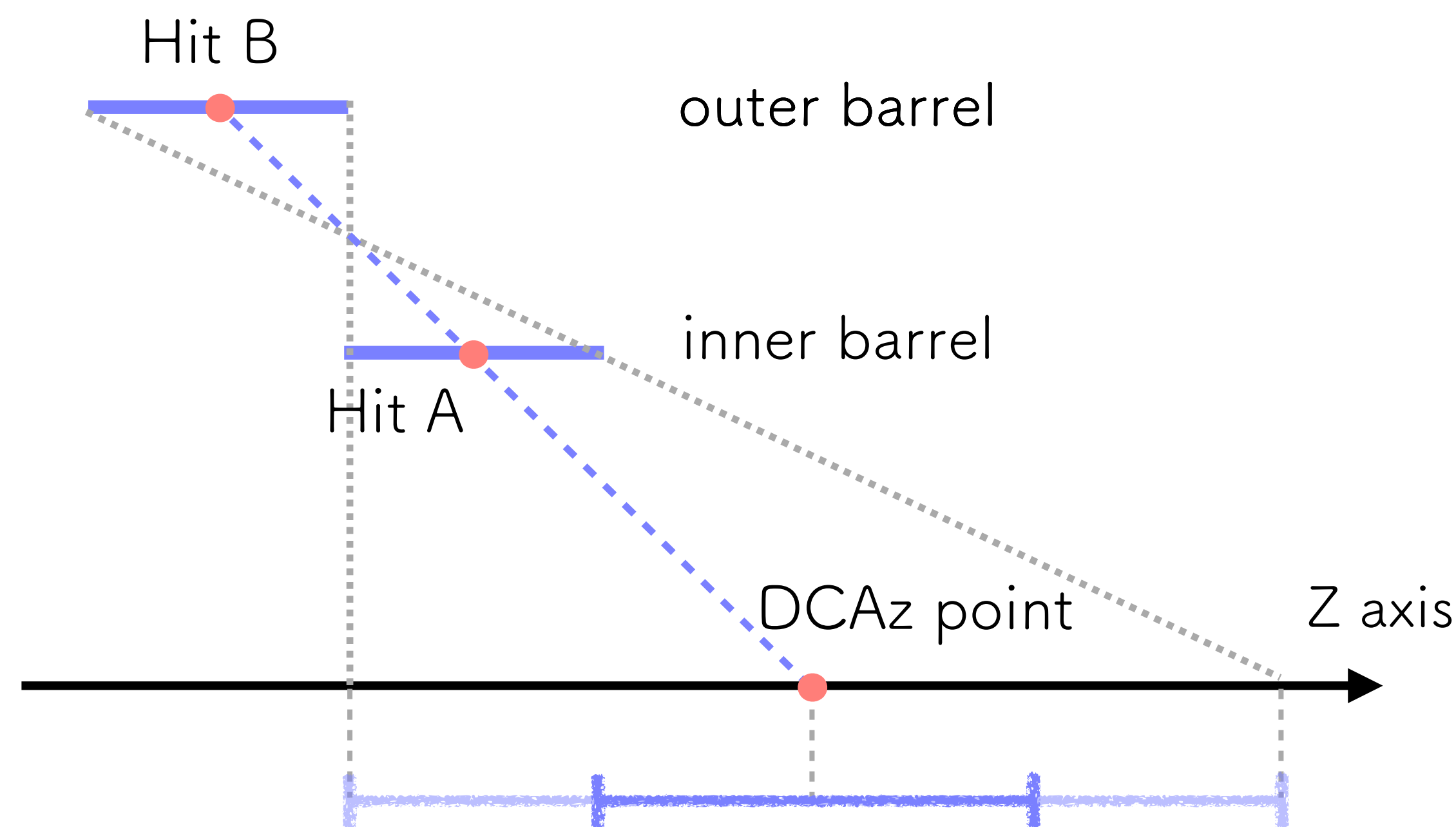
- 1σカットをかけた平均法が最も精度が良い  
⇒平均法で求める時はカットをかけた方が良い
- ピーク法とカットをかけた平均法で、値の差は小さいがヒストグラムの形が大きく違う  
⇒カットをかけた平均法の方が細く長い。  
**測定安定度が増している**

# ストリップ幅による位置分解能を誤差として含めた DCAz座標分布から $z_{\text{vertex}}$ を求める

ここまで、ヒットのz座標は、センサーのどこを通過していても**センサーの中心**を通ったものとして考えていた

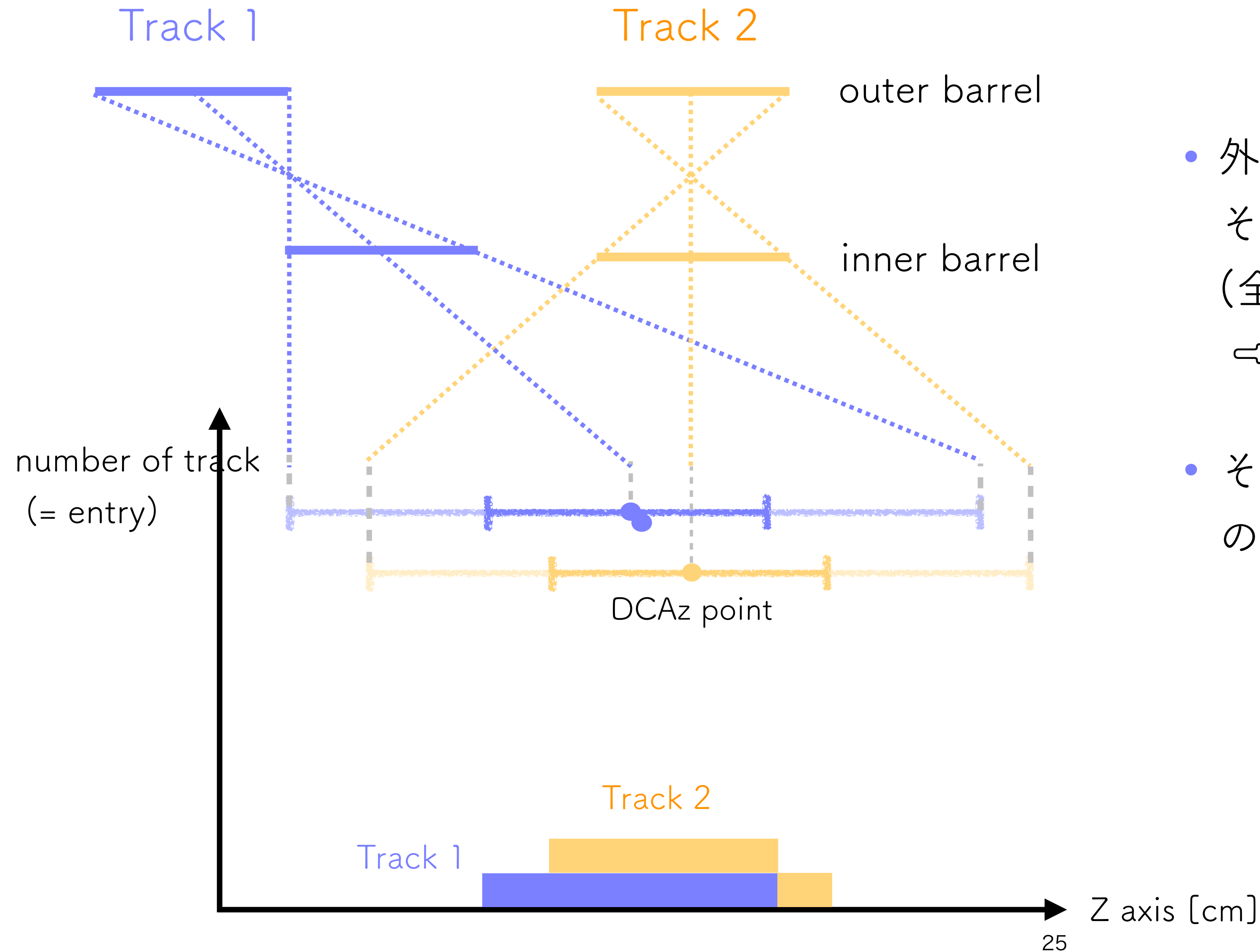
⇒ 実際はセンサーの幅分の範囲内なら  
どこにでも分布する可能性がある

⇒ z座標の分布し得る範囲の位置分解能を  
DCAz座標の誤差として考える





# DCAz座標の誤差の取り方

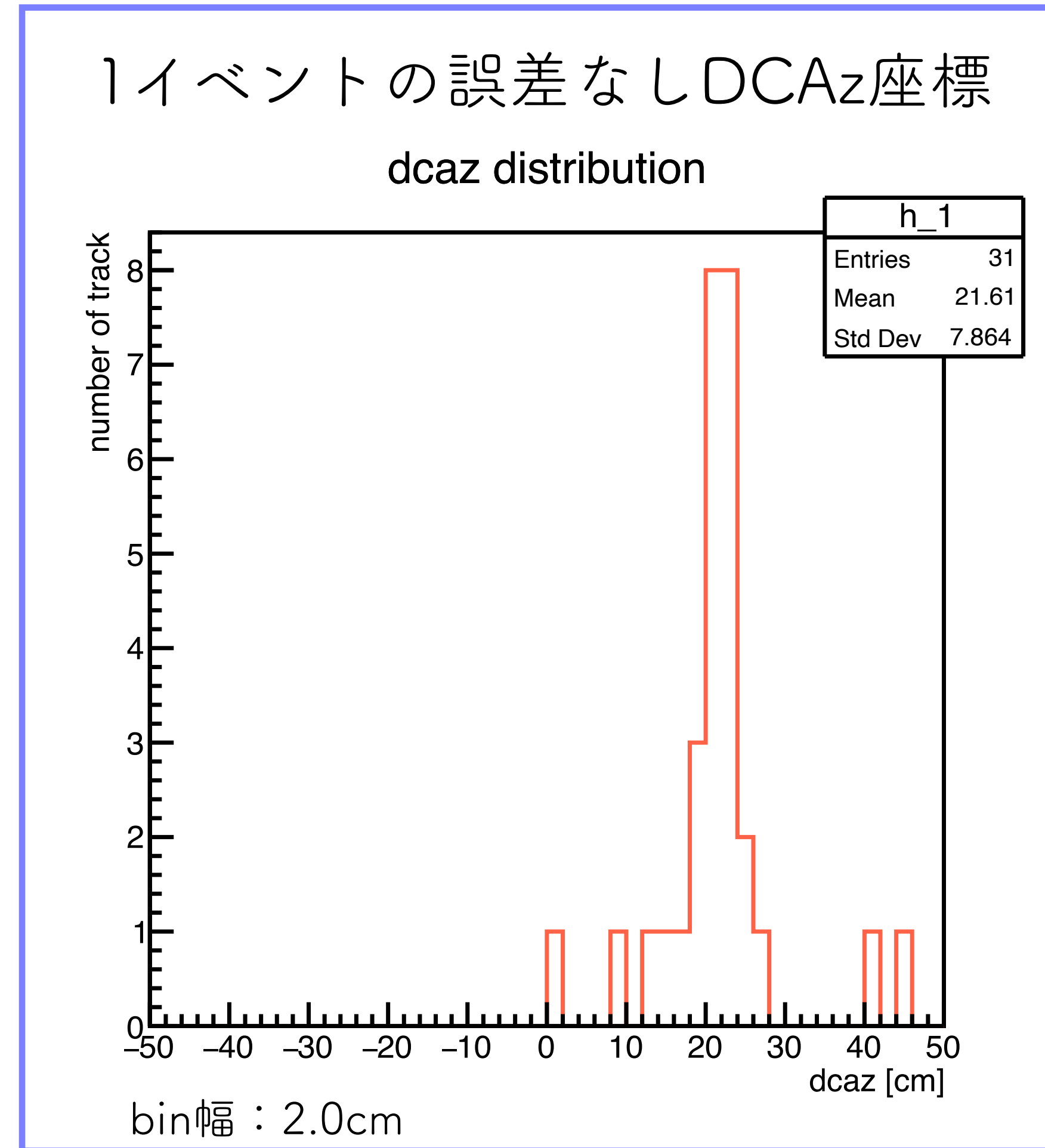
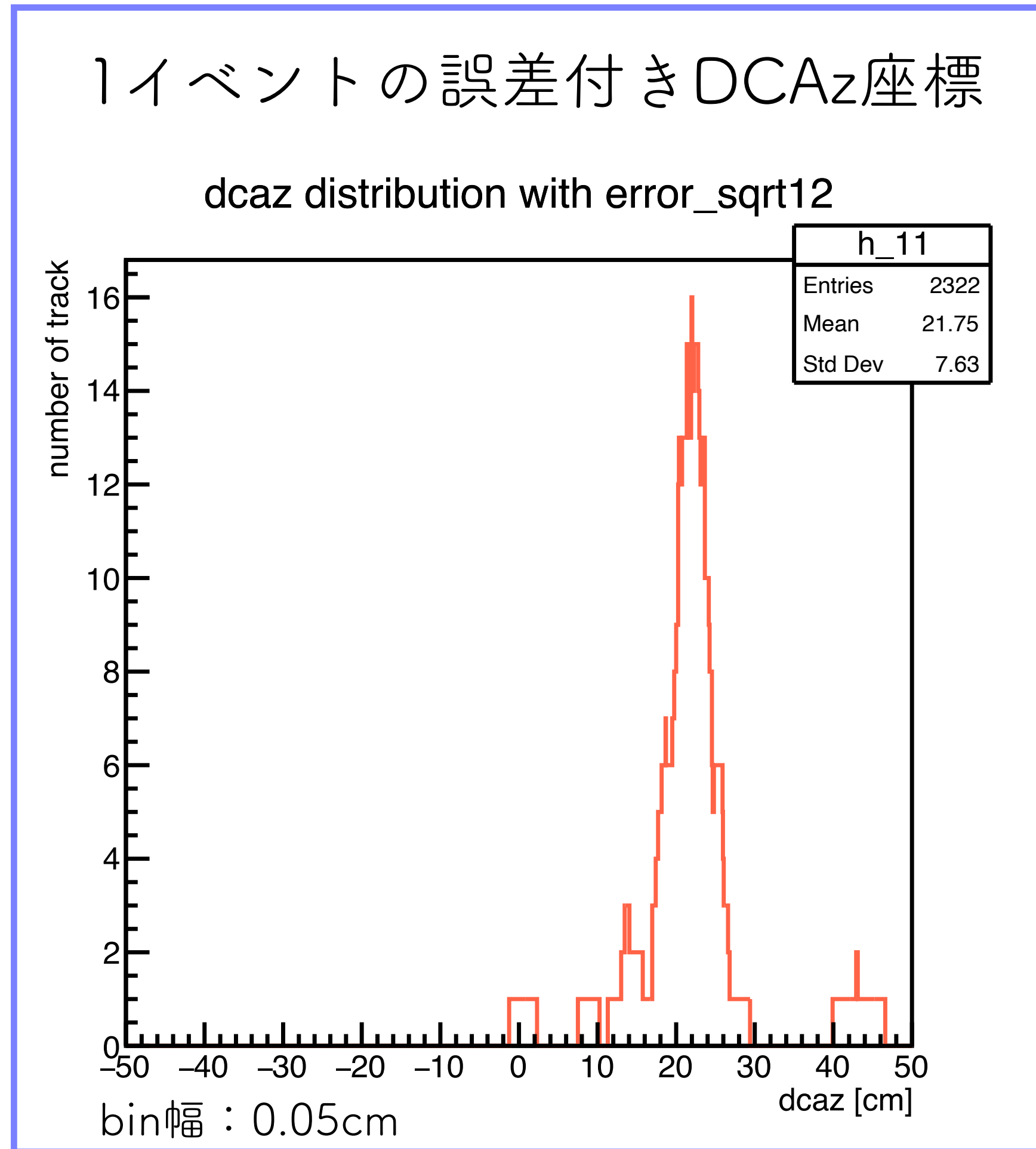


- 外層(outer barrel)、内層(inner barrel)それぞれで取り得る範囲の位置分解能(全幅/√12)を誤差範囲として取る。  
⇒誤差範囲含めてDCAz座標をプロット
- そのプロットを用いて、1イベントごとのz\_vertexを計算していく

Chip type-A : センサー幅 = 1.6cm

Chip type-B : センサー幅 = 2.0cm

# DCAz座標プロットの比較



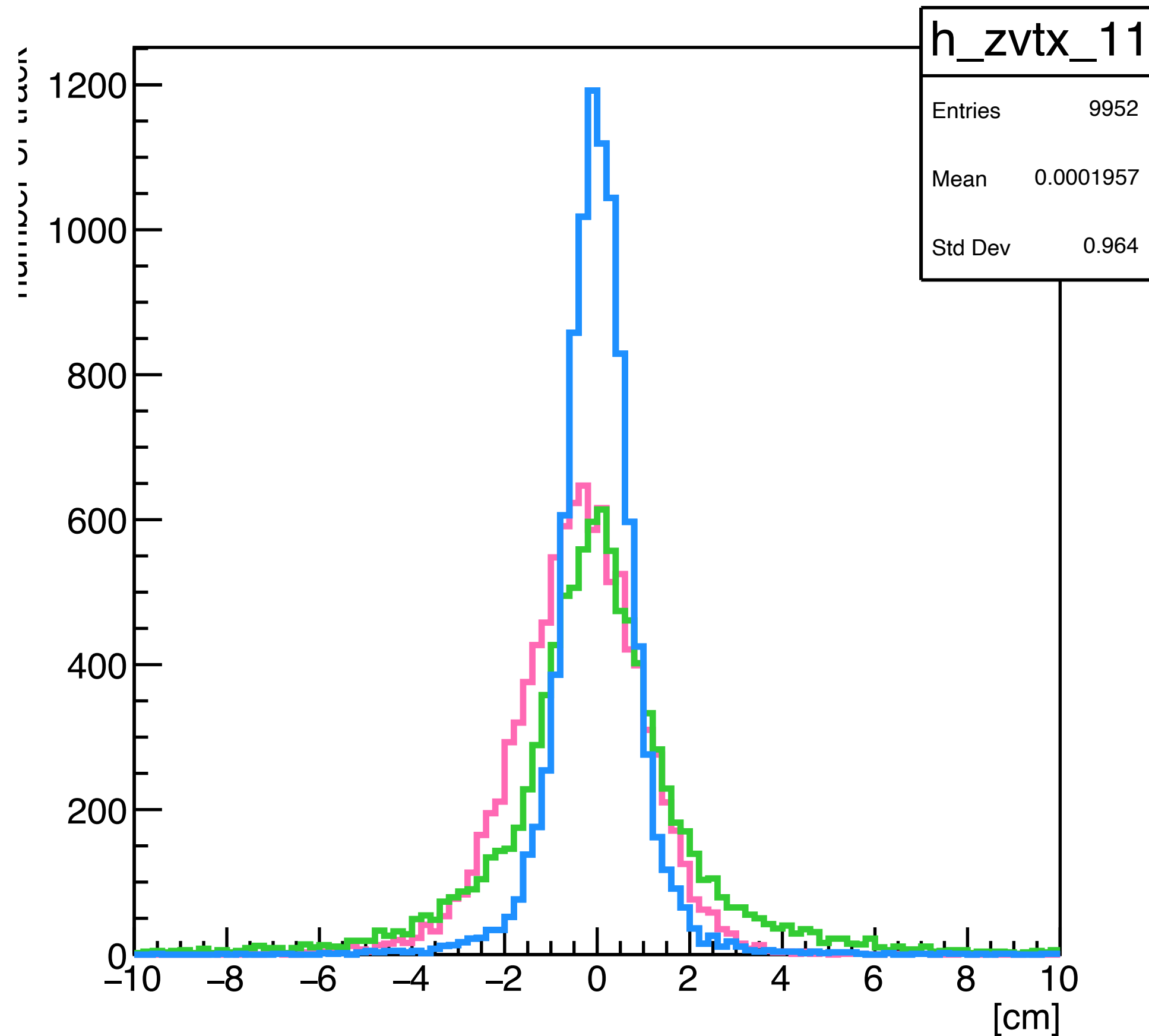
分布の基本的な形は変わっていないが、以前は一点だったところが誤差分だけ幅を持つようになった

プロットについて、誤差幅を0.05cmずつに区切ってプロットしているため、bin幅が0.05cmになっている。

誤差を考えない場合は、z軸方向のchip幅が最大で2.0cmのため、それに合わせてbin幅2.0cmでプロットしている。

# 誤差付きDCAz座標プロットを使用した平均法、ピーク法、カットをかけた平均法で求めたz\_vertexのプロットの比較

overlaid histogram - (DCAz with error)

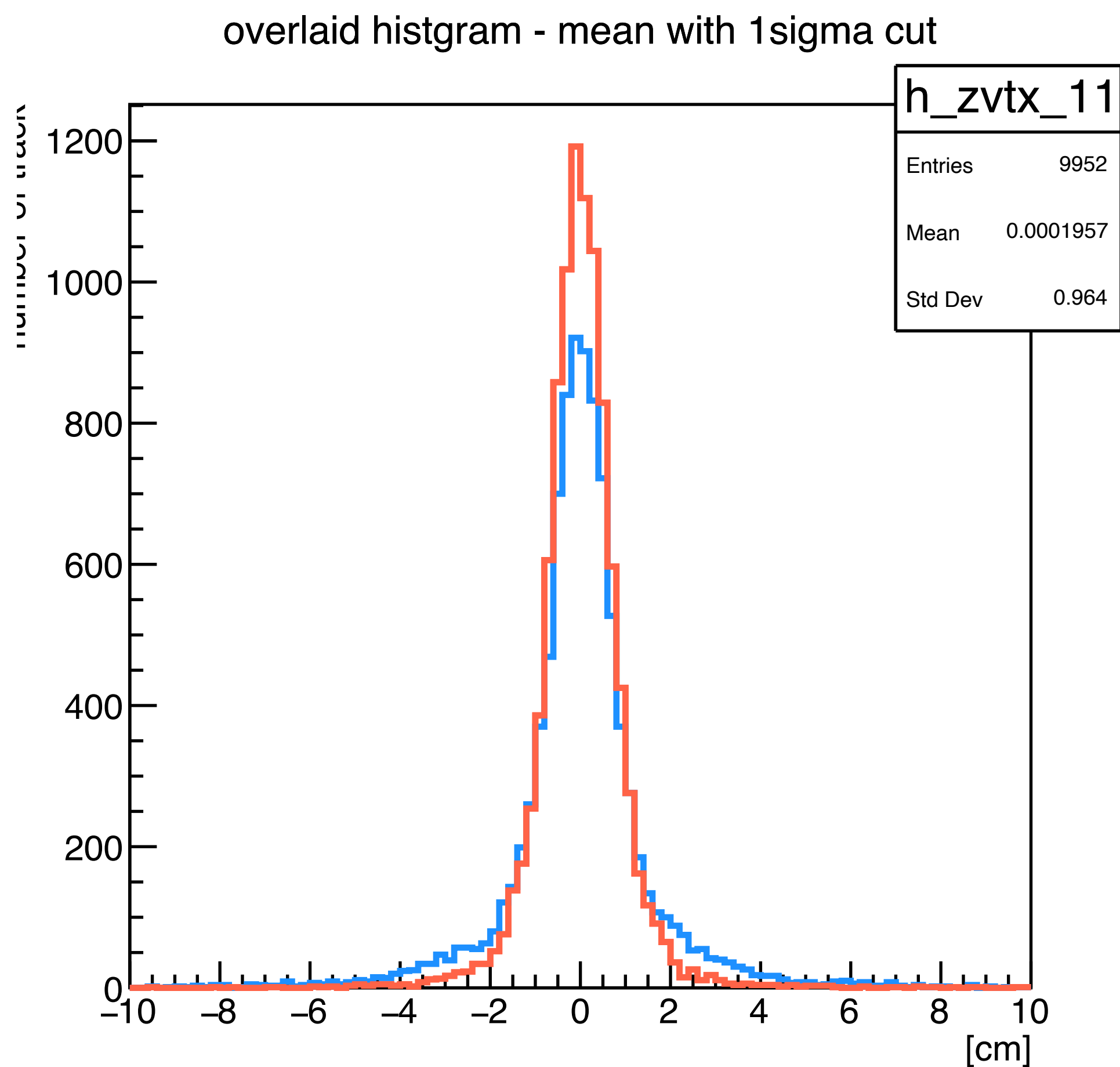


	Std値[cm]
平均法	2.119
ピーク法	1.423
1σカットをかけた平均法	0.964

1σカットをかけた平均法で求めたStd値が一番小さく、ヒストグラムも細長くなっている  
⇒1σカットをかけた範囲内での平均法が一番精度が良い

# カットをかけた平均法のz\_vertexのプロットの比較

DCAz座標のプロット時に誤差を考えない場合と誤差を考えた場合それぞれで、 $1\sigma$ のカットをかけた平均法で求めたz vertexのプロットを比較



$1\sigma$ カットをかけた平均法	Std値[cm]
誤差なしDCAz座標を使用	1.532
誤差ありDCAz座標を使用	0.964

誤差を含めたDCAz座標のプロットから求めた方がヒストグラムが細長く、分解能も高い  
⇒ **誤差を考えたDCAz座標プロットからz\_vertexを求めた方が精度が良い**

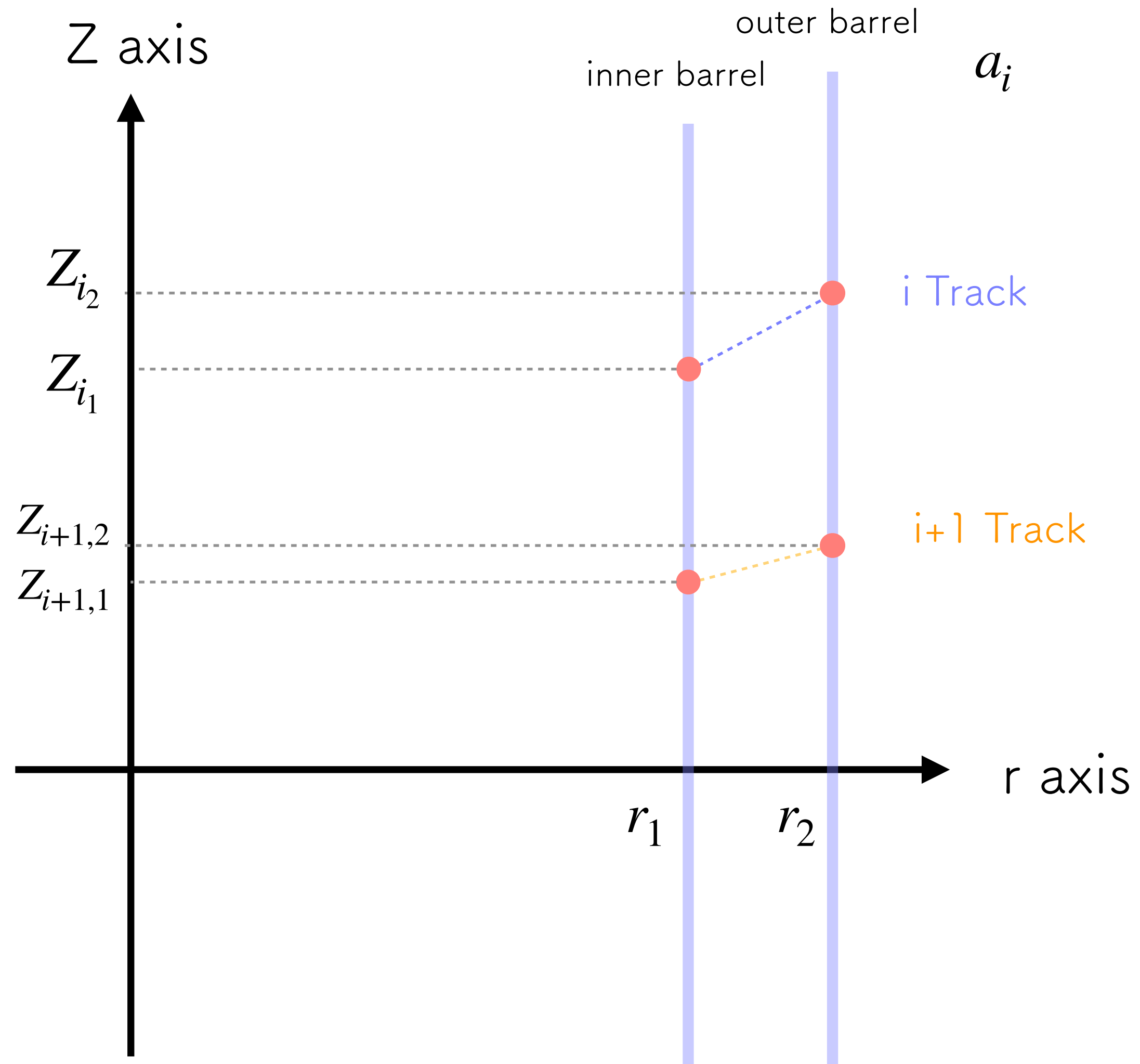
# 研究概要

1. 以下の方法で1イベントごとにz軸方向の衝突点( $z_{\text{vertex}}$ )を計算
  - 平均法
  - ピーク法
  - カットをかけた範囲内での平均法
  - 加重平均法
2. それぞれの方法で分解能を比較し、最適な方法を決定する

使用データ：陽子陽子衝突、磁場なしシミュレーションデータ(Pythia (8.307))  
x\_vertex=0、y\_vertex=0、z\_vertexの $\sigma=20\text{cm}$ 、イベント数10000

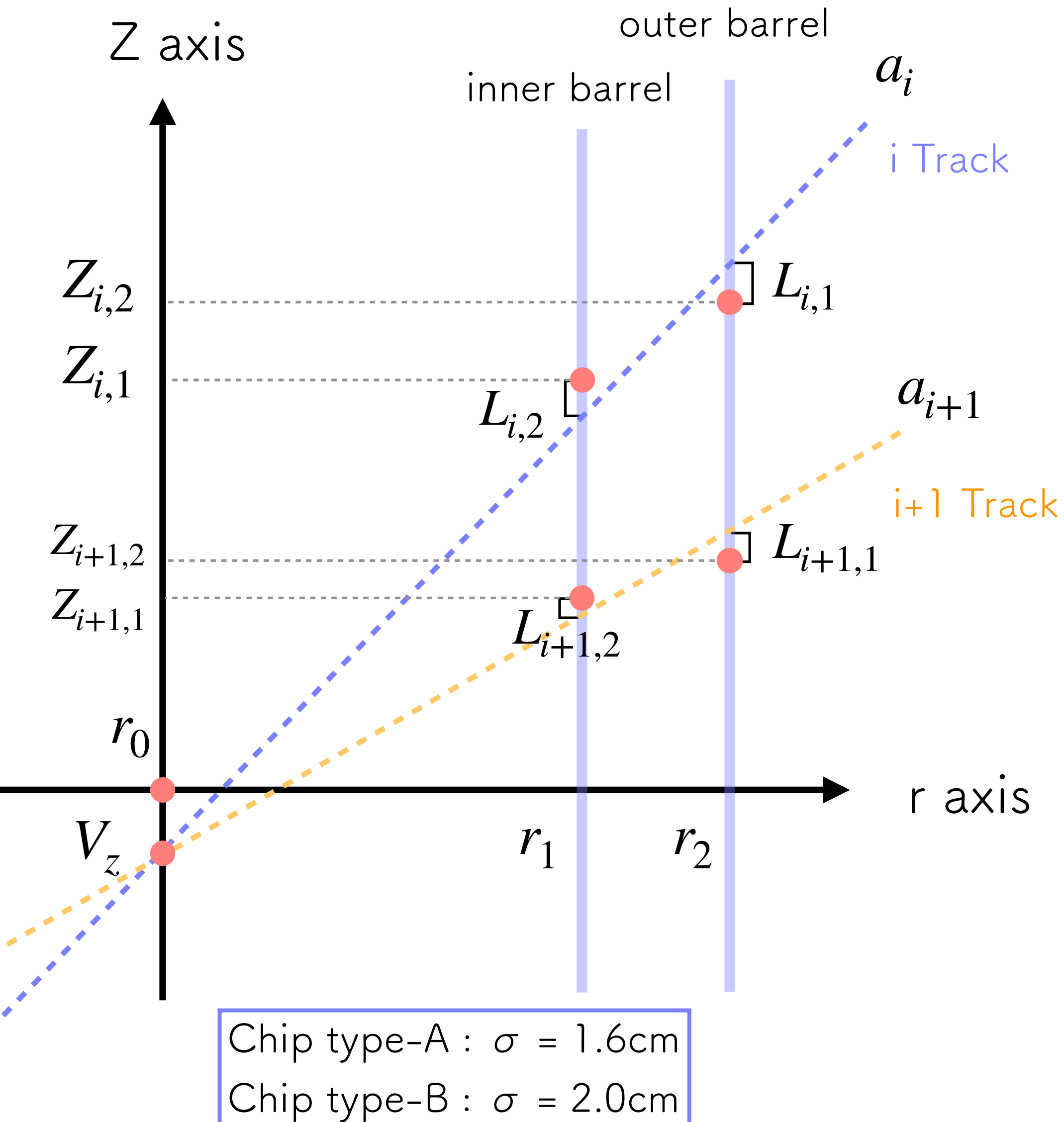
# ヒットのZ座標、トラックの傾き $a$ を用いた加重平均法で $z_{vtx}$ を求める

1つのイベント中の全てのトラックが通る衝突点を一点求める



# ヒットのZ座標、トラックの傾きaを用いた加重平均法でz\_vtxを求める

1つのイベント中の全てのトラックが通る衝突点を一点求める



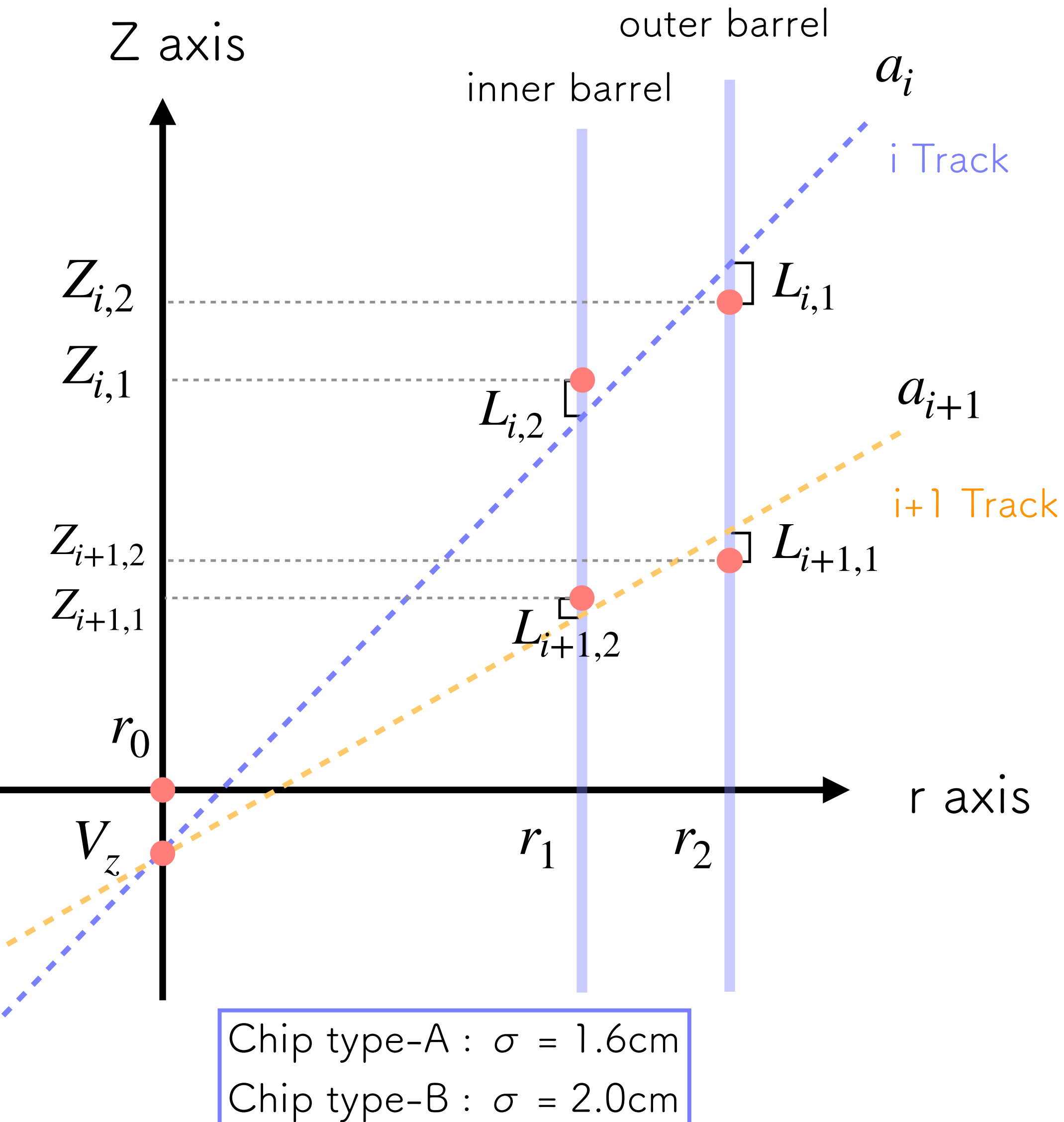
- 求めたい衝突点  $V_z$  から二点のヒットに向かって線を引き、その傾きを  $a_i$  とする
- 1つのトラックの傾き  $a_i$  の線が通ったbarrel上の点とヒットの

Z座標との距離  $L_{ij} = \frac{(Z_{ij} - (a_i(r_j - r_0) + V_z))^2}{\sigma_{z_{ij}}^2}$  を求める

(  $r_0 = \sqrt{x_{vtx}^2 + y_{vtx}^2}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_{z_{ij}} = 1.6 \text{ or } 2.0$  )

# ヒットのZ座標、トラックの傾きaを用いた加重平均法でz\_vtxを求める

1つのイベント中の全てのトラックが通る衝突点を一点求める



- 1つのトラックの傾き  $a_i$  の線が通ったbarrel上の点とヒットの

Z座標との距離  $L_{ij} = \frac{(Z_{ij} - (a_i(r_j - r_0) + V_z))^2}{\sigma_{z_{ij}}^2}$  を求める

- 1イベント分の全トラックにおける距離  $L_{ij}$  の和

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{(Z_{ij} - (a_i(r_j - r_0) + V_z))^2}{\sigma_{z_{ij}}^2}$$

( $n =$  トラック数,  $r_0 = \sqrt{x_{vtx}^2 + y_{vtx}^2}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\sigma_{z_{ij}} = 1.6$  or  $2.0$ )

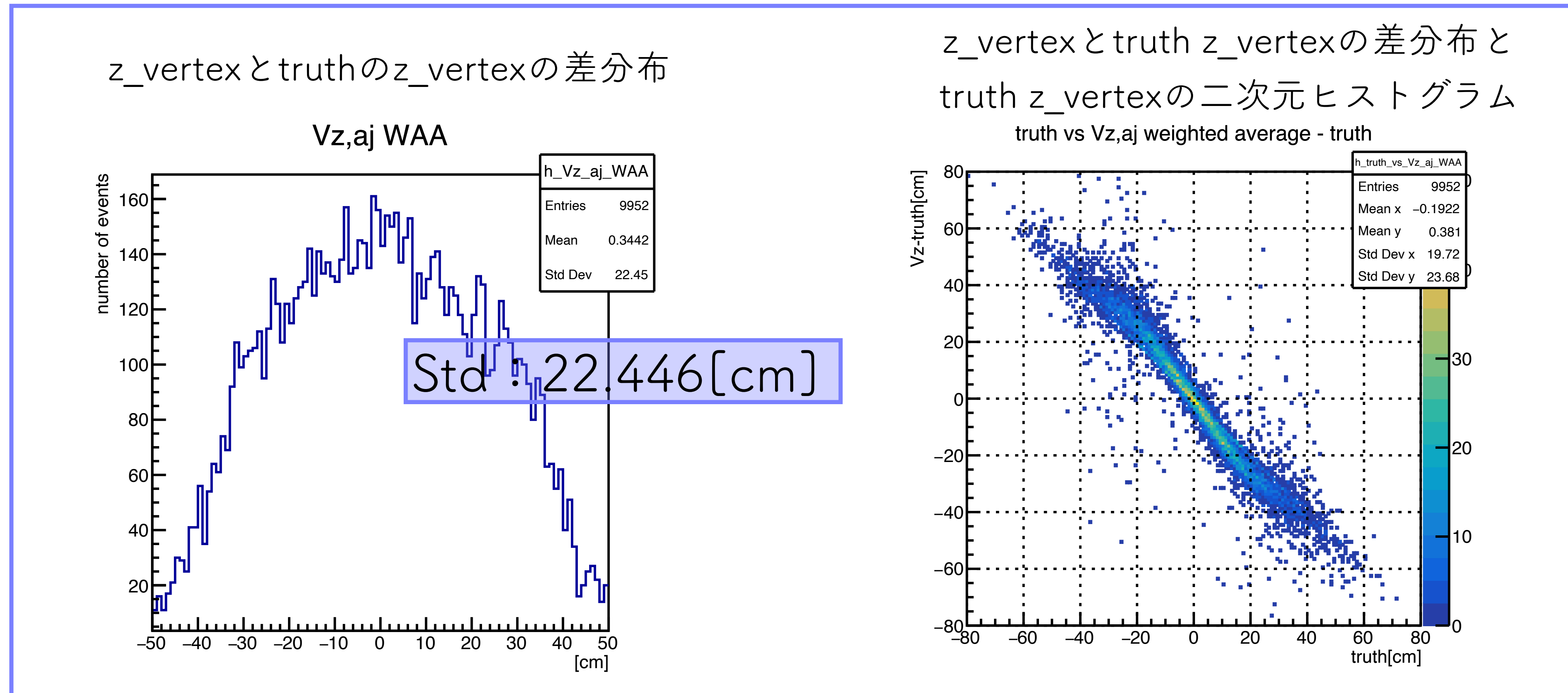
が一番小さくなる時の  $V_z$  を最小二乗法で求める

- これを全イベント分計算する



# ヒットのZ座標、トラックの傾き $a$ を用いた加重平均法で求めた $z\_vtx$

求めた $z\_vertex$ とtruthの $z\_vertex$ の差分布、その差分布とtruthの $z\_vertex$ の二次元ヒストグラム



$z\_vertex$ の分布が今までのものよりかなり太く、Stdの値も非常に大きくなってしまった。

二次元ヒストグラムでは、斜めに相関が見えてしまっている。

⇒計算が間違っている可能性。計算方法やマクロ<sub>33</sub>を再確認し、改善する必要がある

# 4. まとめ、今後の課題

# まとめ

数種類の方法でz\_vertexを計算して分解能を比較し、最適な計算方法を求めた

各方法で求めたz\_vertexプロットの分解能

	計算方法	Std[cm]
誤差なしDCAz座標の プロットを使用	ピーク法	1.742
	平均法	3.214
	1σの範囲内の平均法	1.532
誤差ありDCAz座標の プロットを使用	ピーク法	1.423
	平均法	2.119
	1σの範囲内の平均法	0.964
加重平均	ヒットのz座標と傾きa の加重平均	22.446

- 誤差を含めたDCAz座標を用いた、1σでカットをかけた平均法が一番精度が良い
- DCAz座標を用いる場合は誤差を考えた方が良い
- 加重平均法での結果が悪い。改善の余地あり

# 今後の課題

- 加重平均法を見直す
- 金原子核衝突のシミュレーションデータを用いて、同様に精度の良い  $z_{\text{vertex}}$  の求め方を確立する
- 実際のデータに反映する

**Back Up**

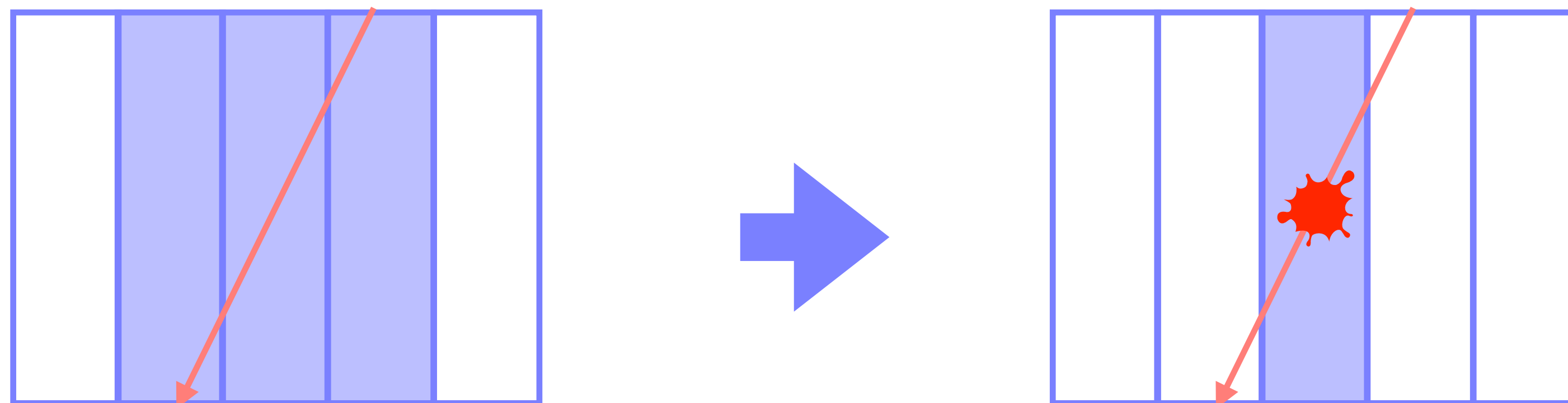
# クラスタリング

荷電粒子がセンサーに斜めに入射すると、複数のセンサーにまたがって通過することがある

同タイミングで同一ラダー内の複数のセンサーを横切ったヒットを1つのヒットにまとめる

→ADC 値（損失エネルギー）で重み付けしてヒット位置を求める

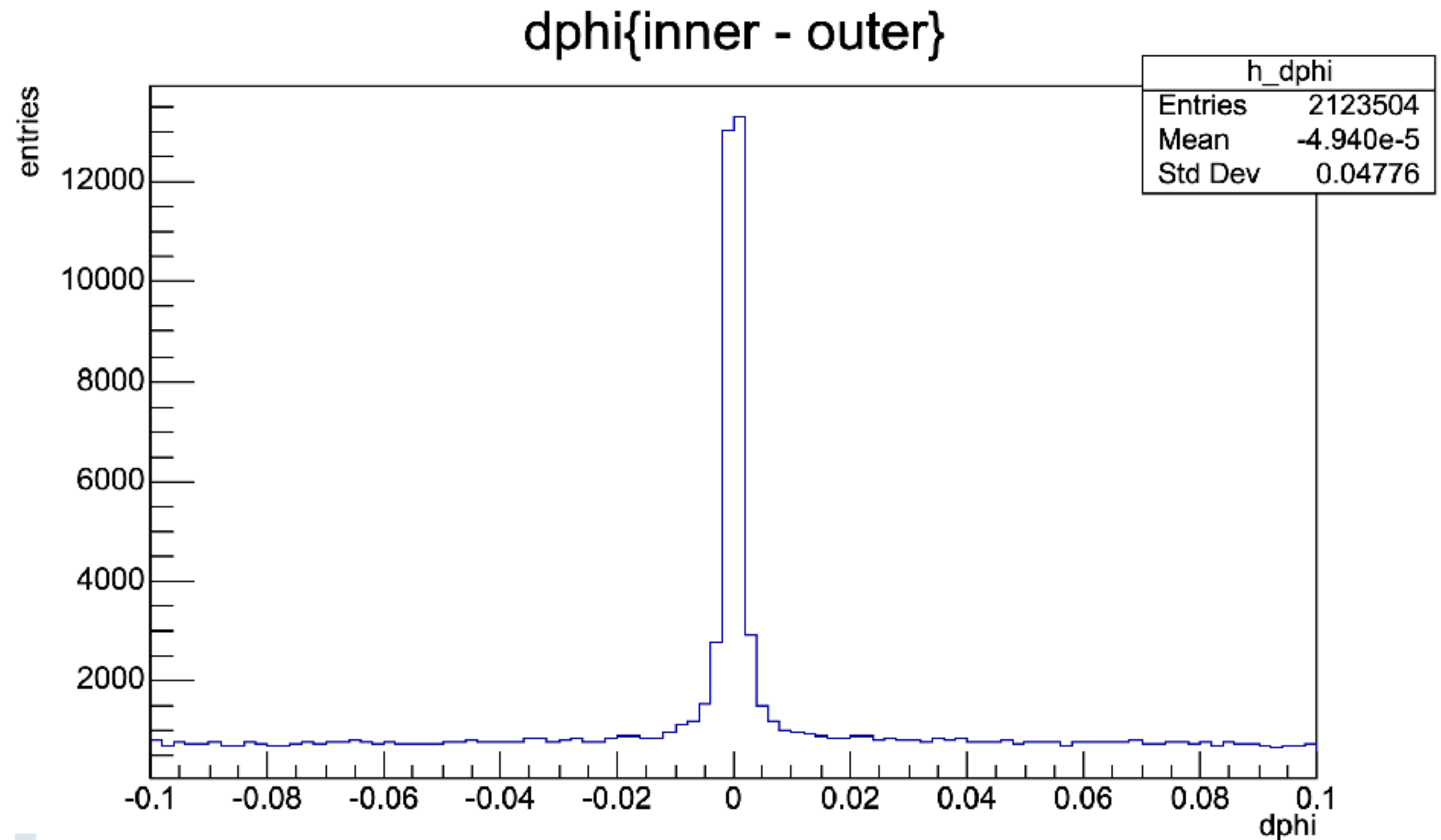
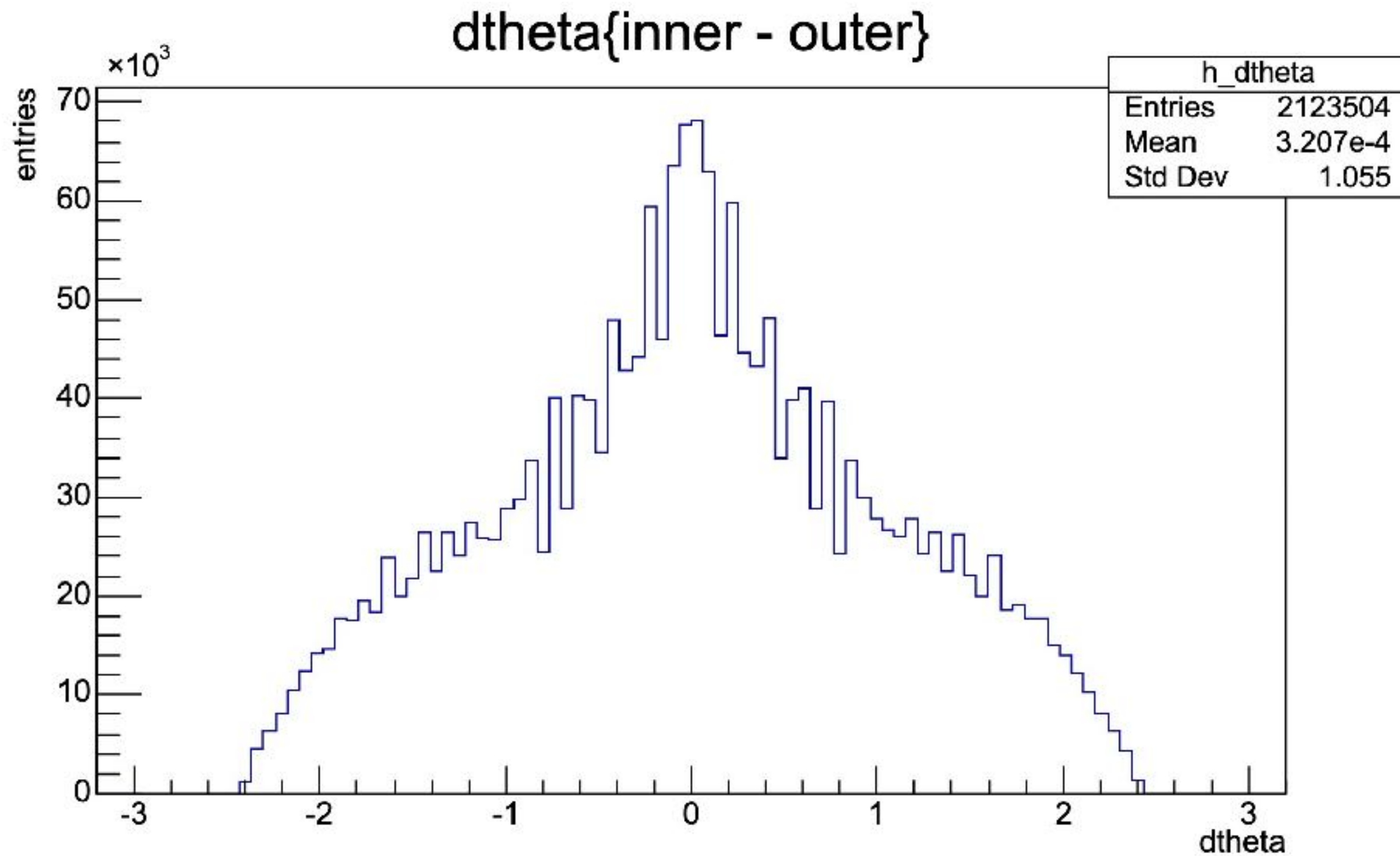
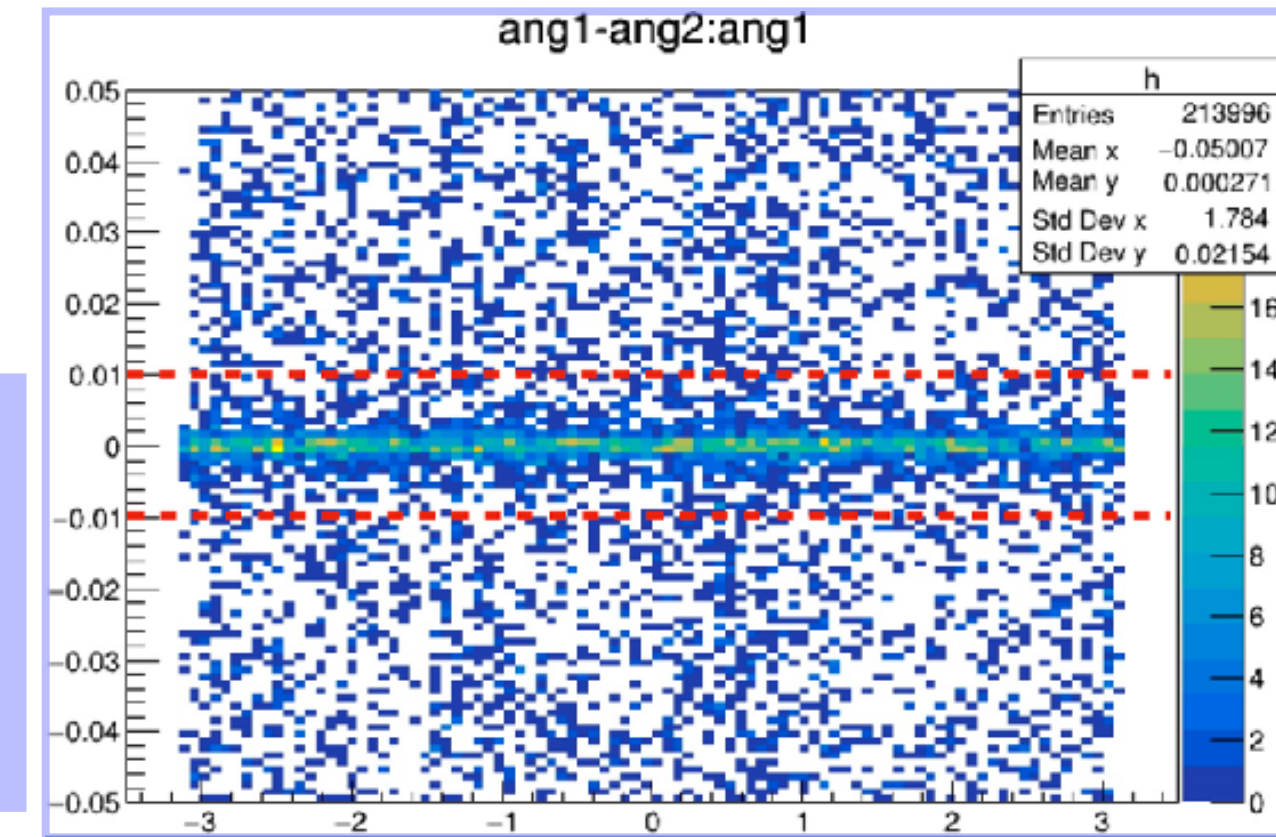
$$Cluster\ position = \frac{\sum (ADC_i \times hit\ position_i)}{\sum ADC_i}$$



# トラックレットの生成

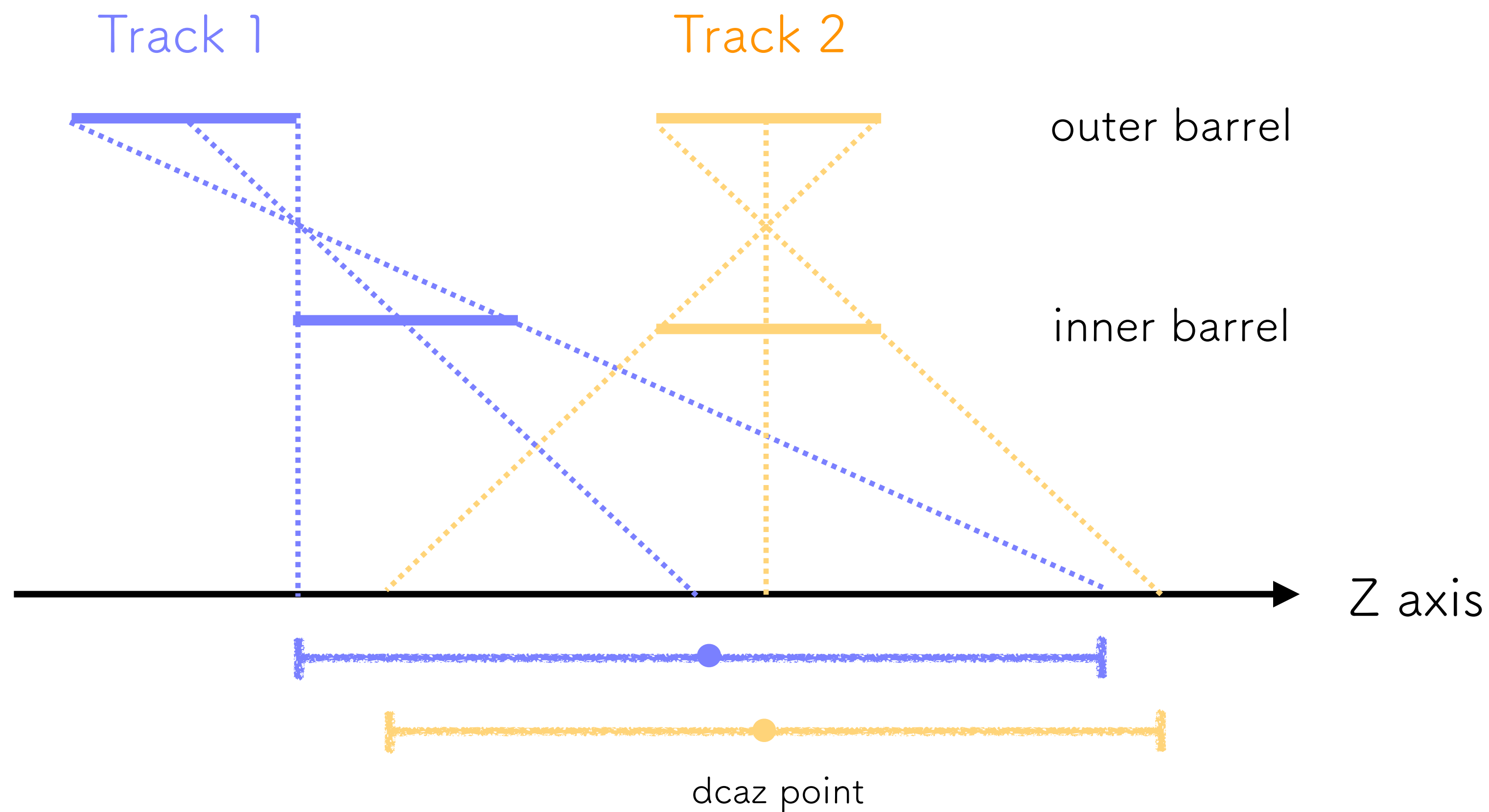
ペアを選ぶ条件

内層上のヒットAの角度差  $|\Delta\phi_{AB}| < 0.01$  [rad] の外層上のヒットBを選ぶ



# Zの範囲の誤差の取り方

From Cheng-Wei's method



outer barrel, inner barrel  
それぞれで取り得る範囲を誤差範囲として取る。  
→誤差範囲含めてプロットする

Chip type-A : chip width = 1.6cm

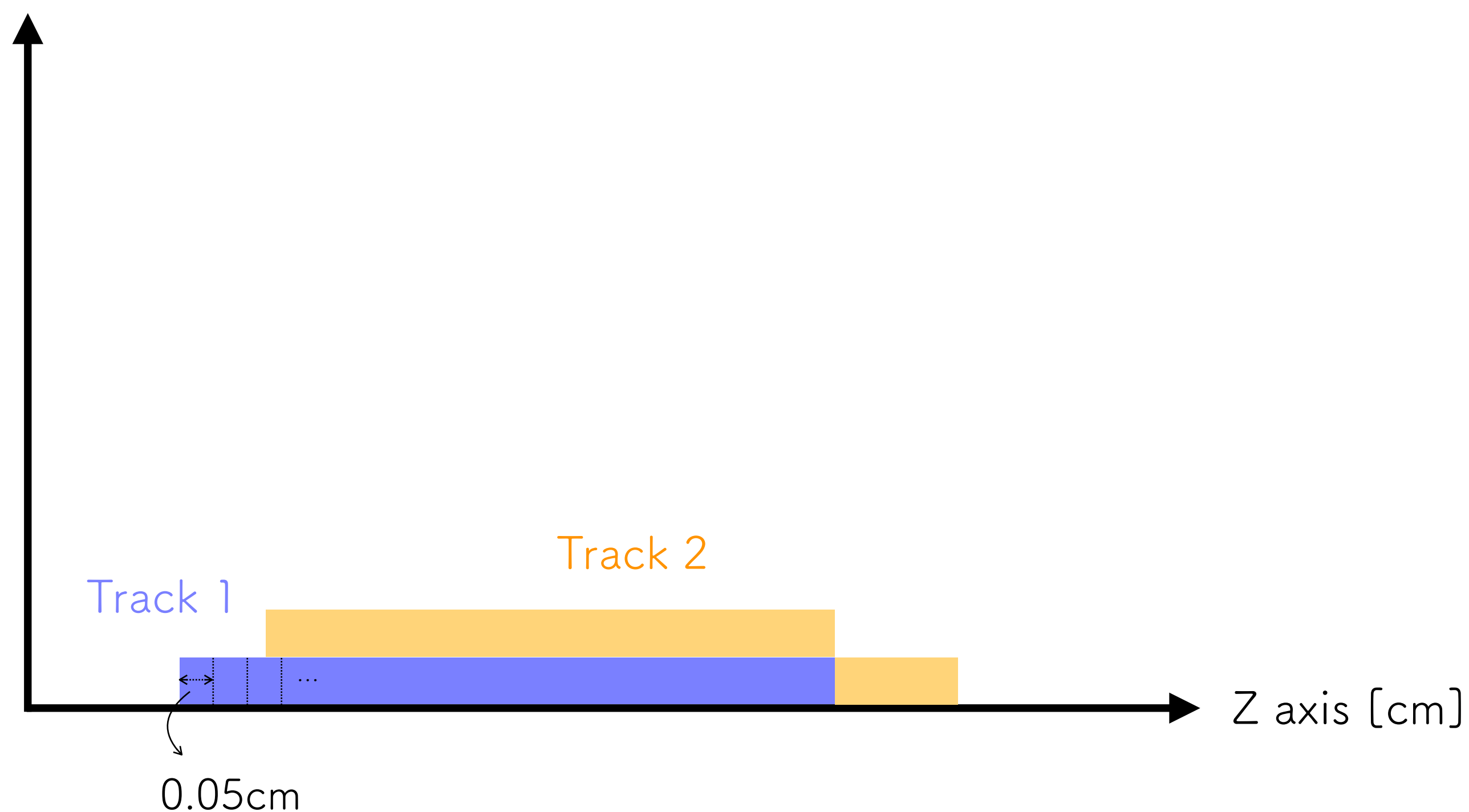
Chip type-B : chip width = 2.0cm



# Zの範囲を誤差としてプロット

From Cheng-Wei's method

number of track (= entry)



- 誤差を考えていないときは、一トラックにつき一つのdca\_z pointのみプロットしていた  
→誤差範囲すべて含めてプロット
- bin幅：0.05cm  
誤差範囲を0.05cmずつに区切ってプロットした
- これを全イベント分行う

# Zの範囲/ $\sqrt{12}$ とする理由

幅 $d$ (1.6cm or 2.0 cm)のセンサーに一つの荷電粒子が入射するとき入射位置は一様に分布する。

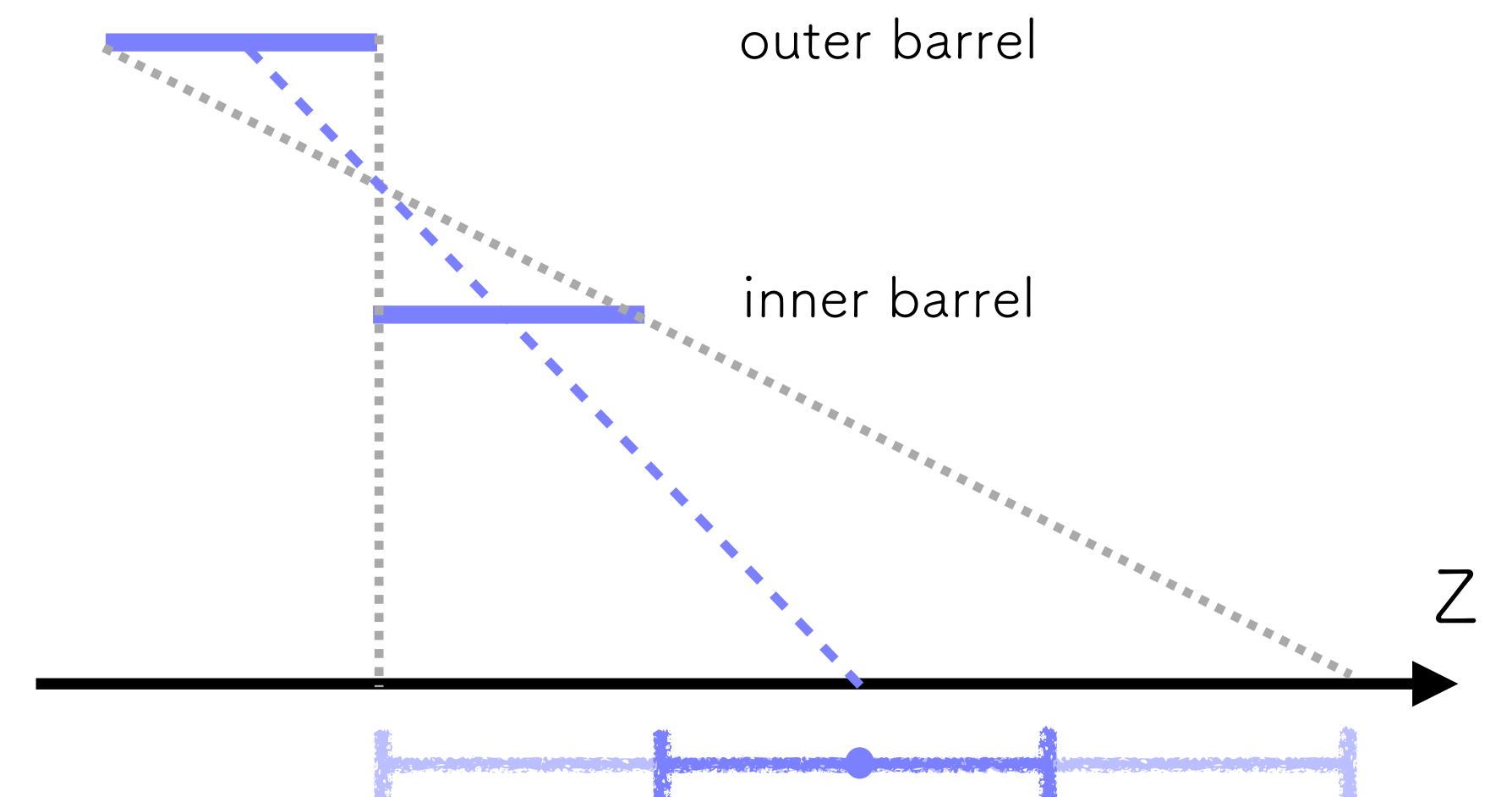
センサーの左端の位置を $Z_0$ とすると、存在確率密度 $P$ は  $P = \frac{1}{d}$

入射位置の期待値 $E(z)$ および位置分解能の二乗 $\sigma_z^2$ は

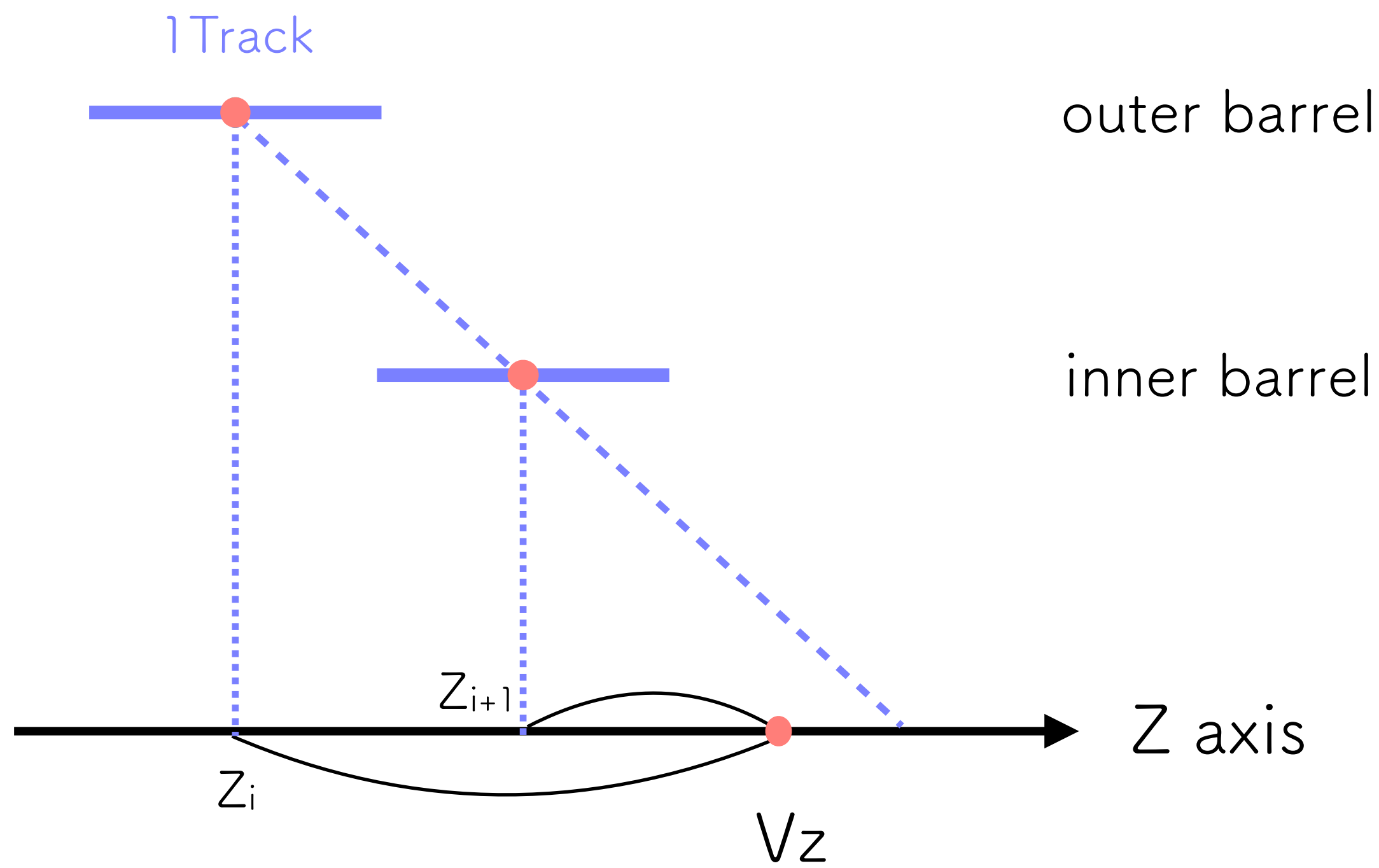
$$\begin{aligned} E(z) &= \int_{z_0}^{z_0+d} PZ d_z & \sigma_z^2 &= \int_{z_0}^{z_0+d} P \times (Z - E(z))^2 d_z \\ &= Z_0 + \frac{1}{2}d & &= \frac{d^2}{12} \end{aligned}$$

よって、位置分解能 $\sigma_z$ は

$$\sigma_z = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

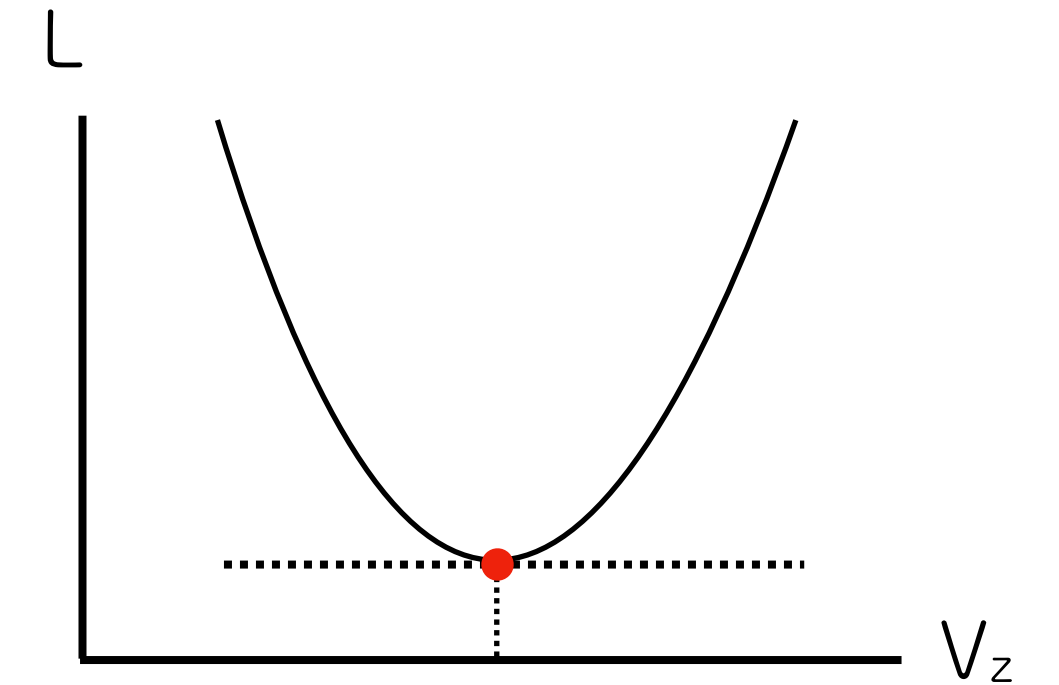


# ヒットのz座標を用いた加重平均からz\_vtxを求める



Chip type-A :  $\sigma = 20\text{mm}$

Chip type-B :  $\sigma = 16\text{mm}$

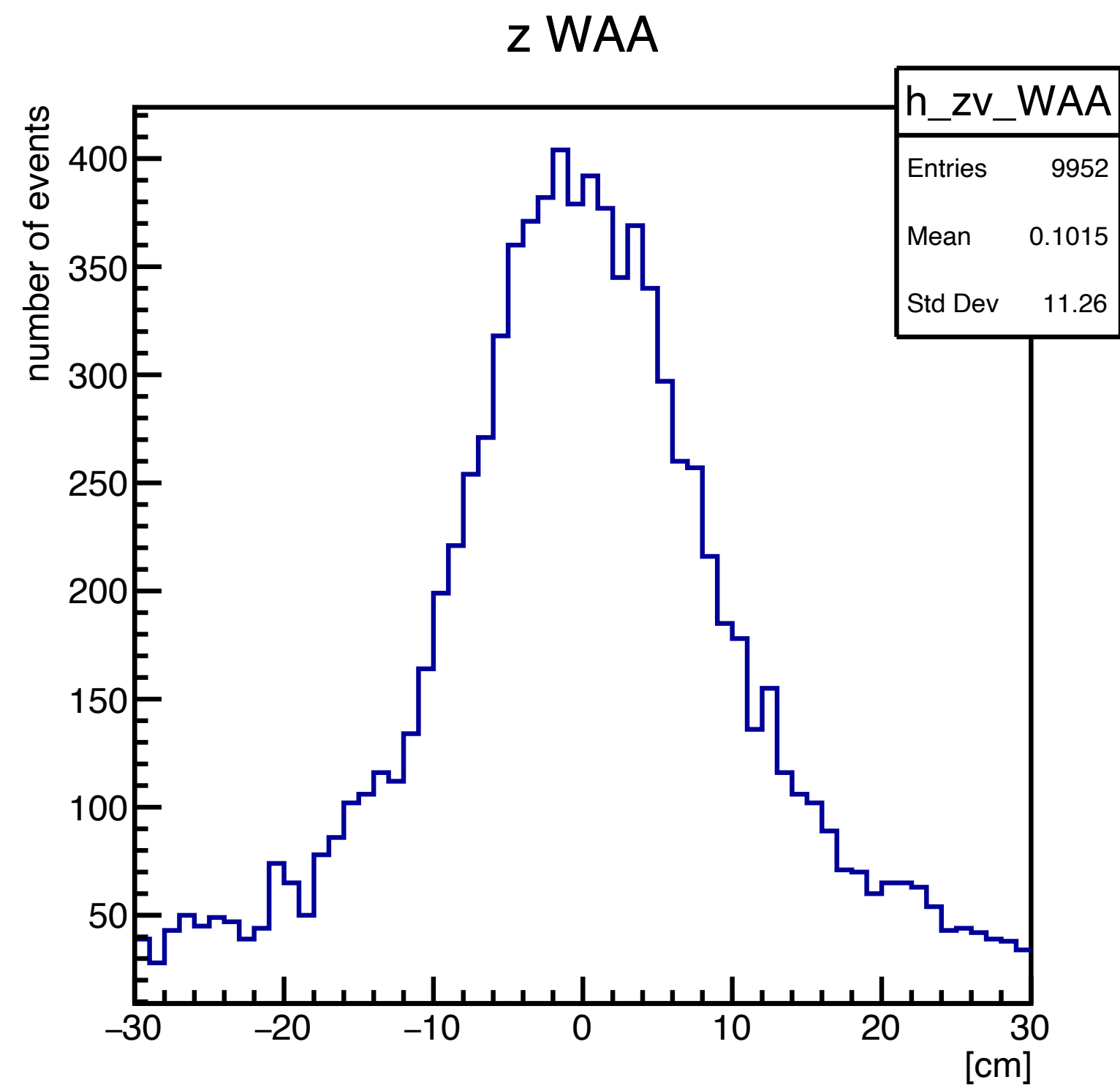


$$L = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(Z_i - V_z)^2}{\sigma_i^2} \quad (n = \text{トラック数})$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_z} = 0 \text{ となる ときの } V_z = \frac{1}{n} \sum \frac{Z_i}{\sigma_i^2} \text{ を求める}$$

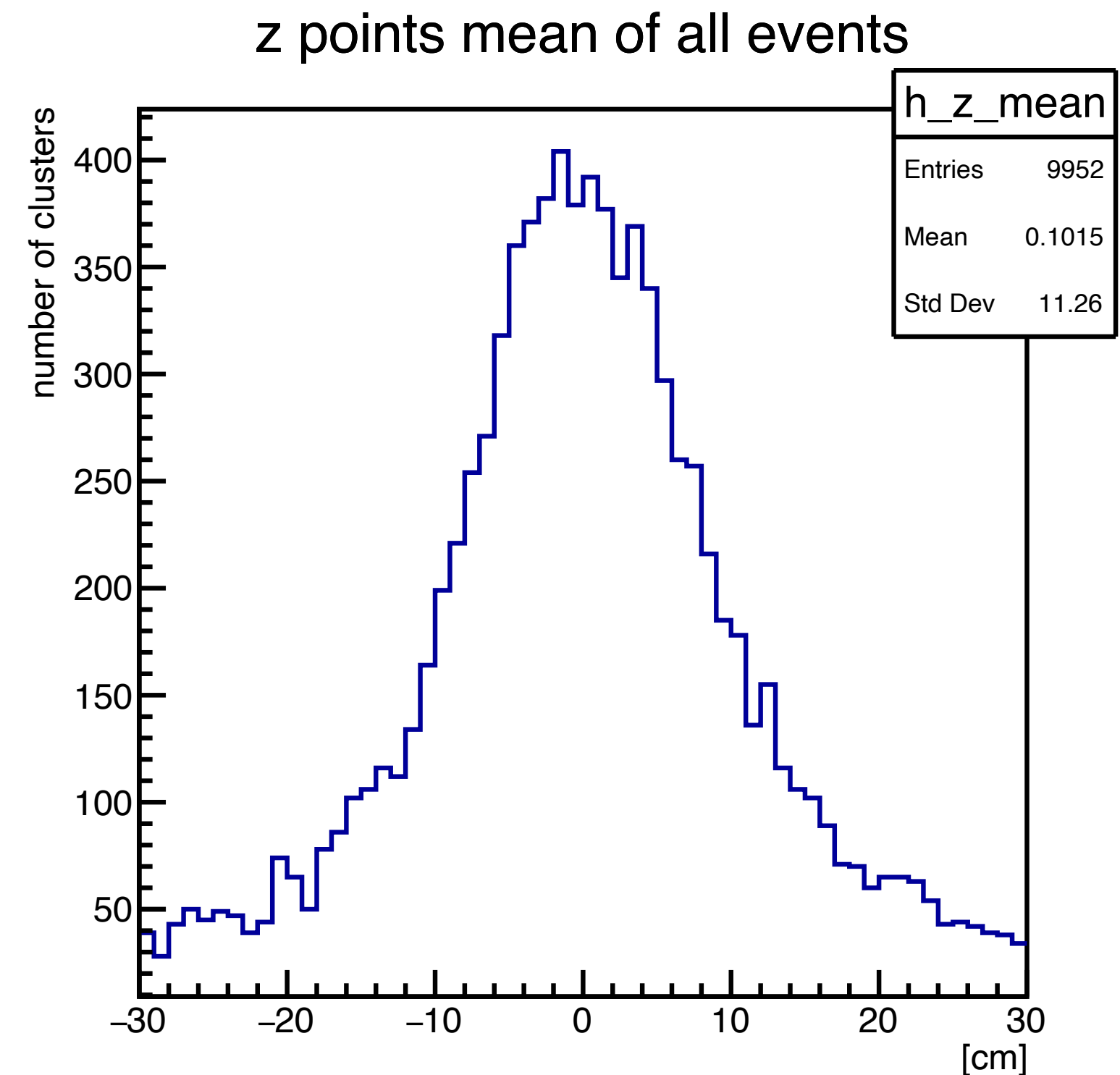
- これをイベント数分繰り返す

# ヒットのz座標を用いた加重平均からz\_vtxを求める

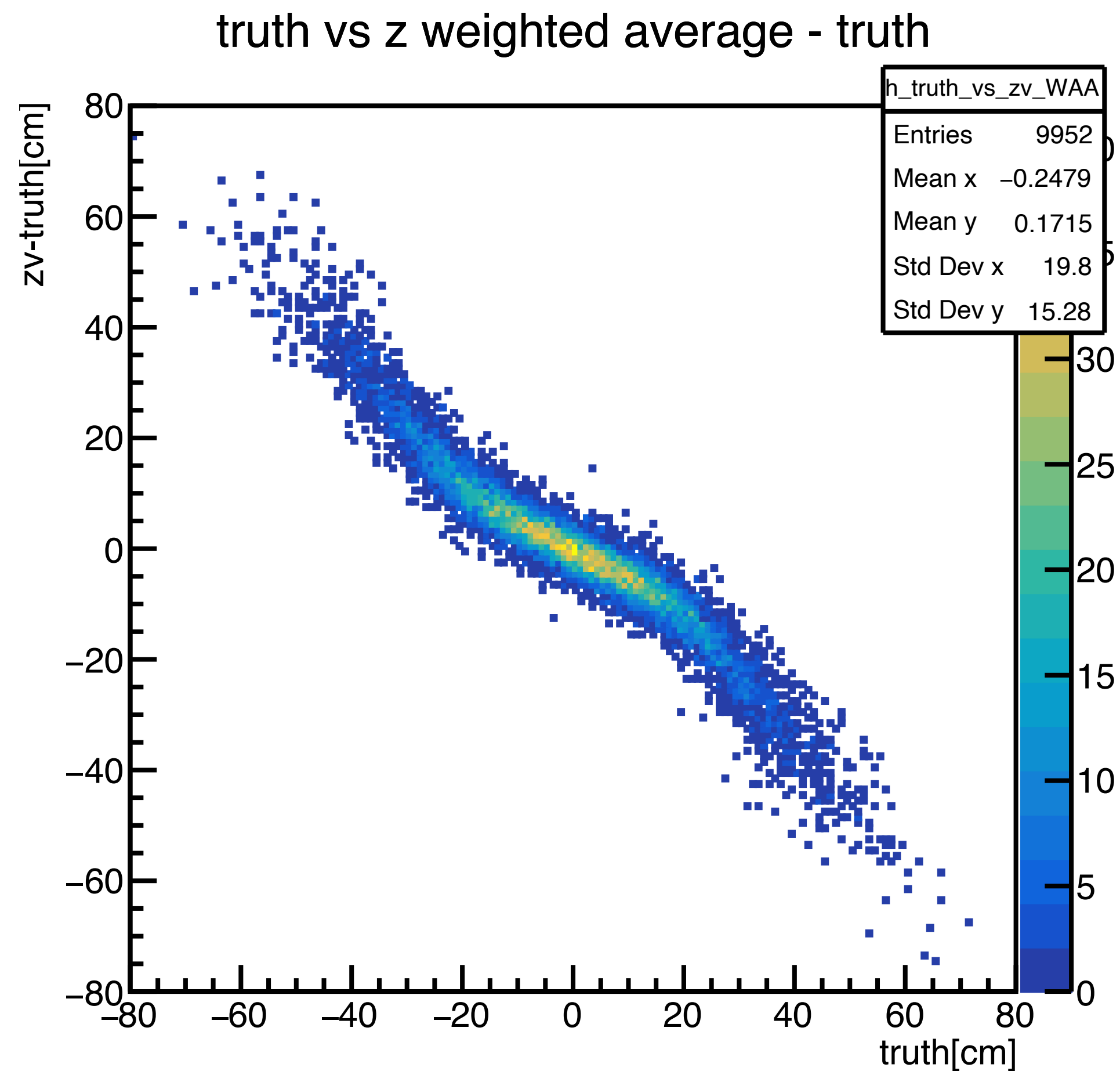


bin width : 1cm

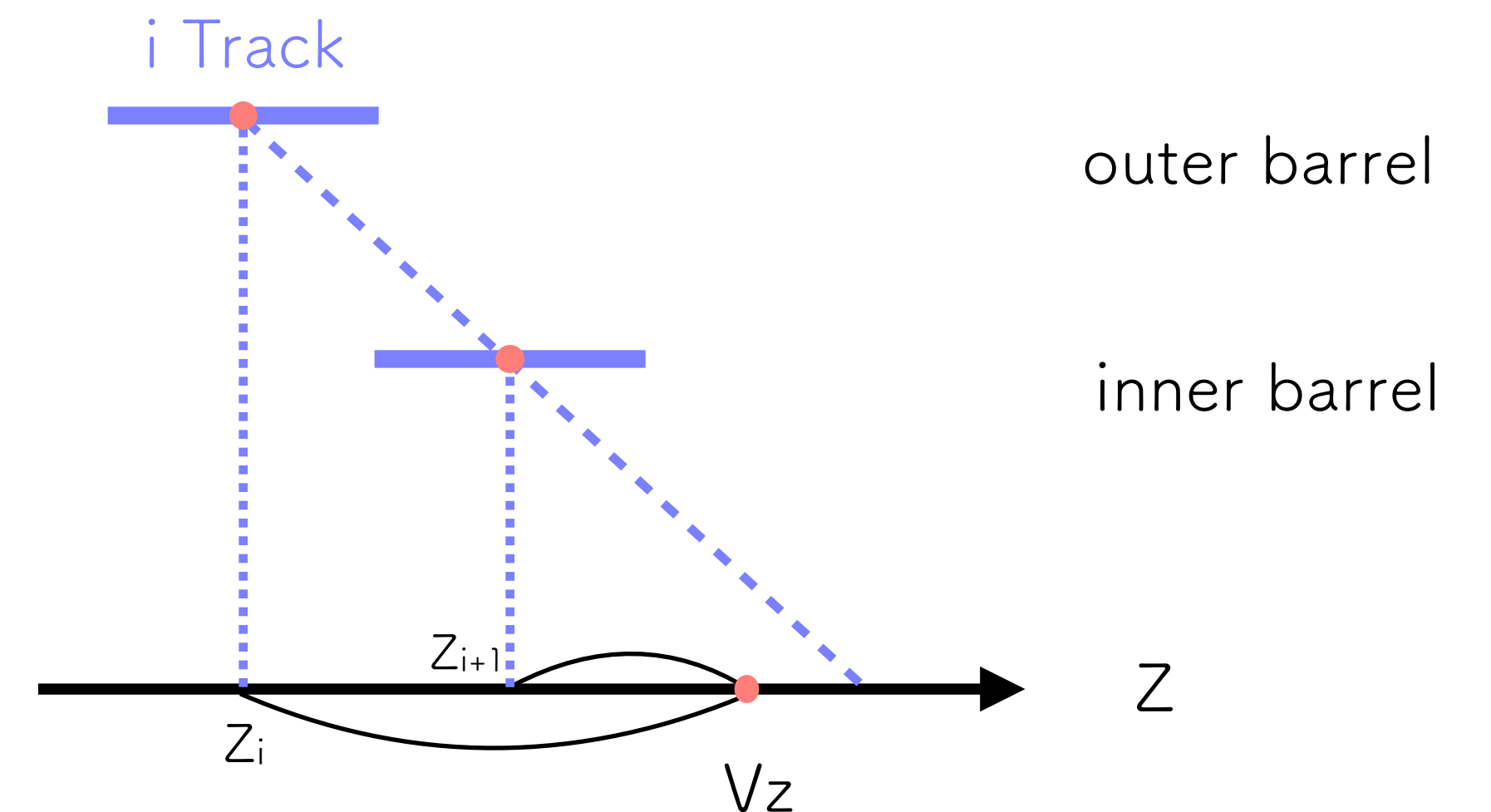
- 誤差を考えずにヒットのz座標の平均値とtruthのz\_vertexの差分分布と全く同じ形のヒストグラムになった



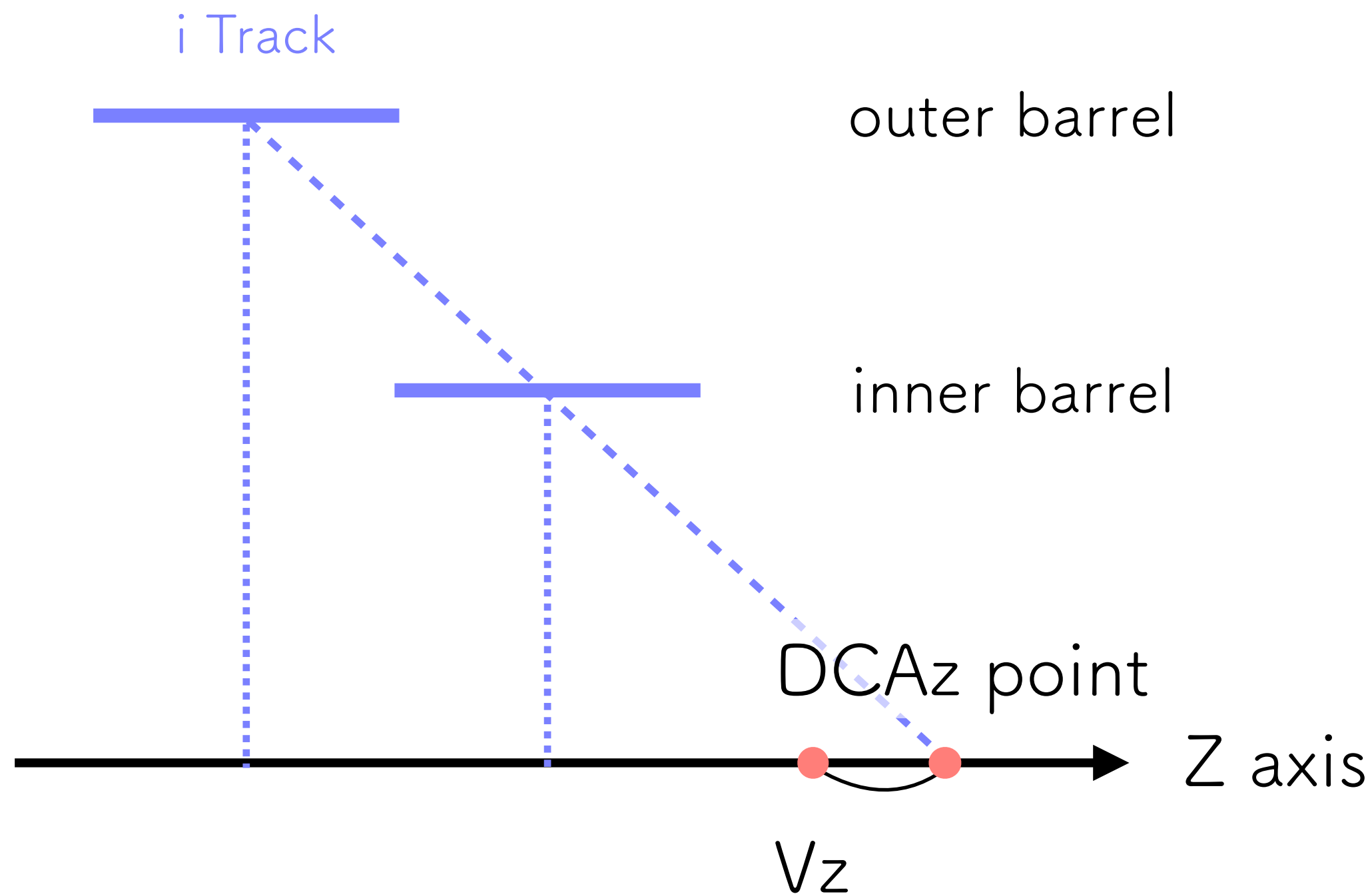
# ヒットのz座標を用いた加重平均で求めたz\_vtx-truth VS truth



- truthが原点より右(正)にずれると求めたz\_vtx-truthは原点より左(負)にずれ、  
truthが原点より左(負)にずれるとz\_vtx-truthは原点より右(正)にずれ  
→傾きを考えていないため。  
予想通りの結果が得られた

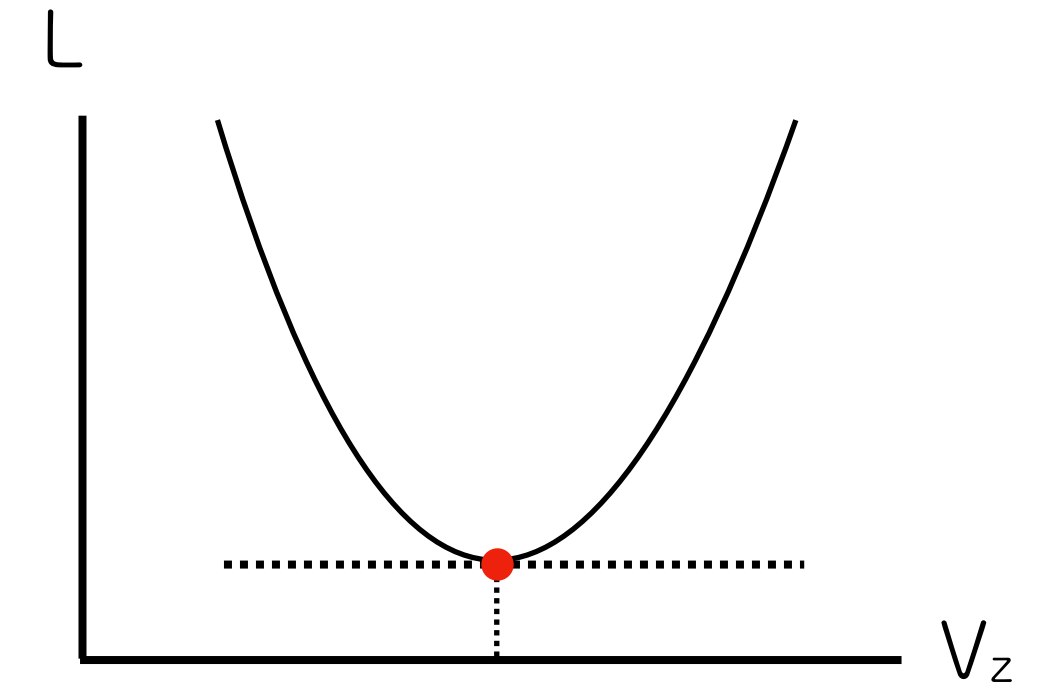


# DCAz座標を用いた加重平均法でz\_vtxを求める



Chip type-A :  $\sigma = 1.6\text{cm}$

Chip type-B :  $\sigma = 2.0\text{cm}$



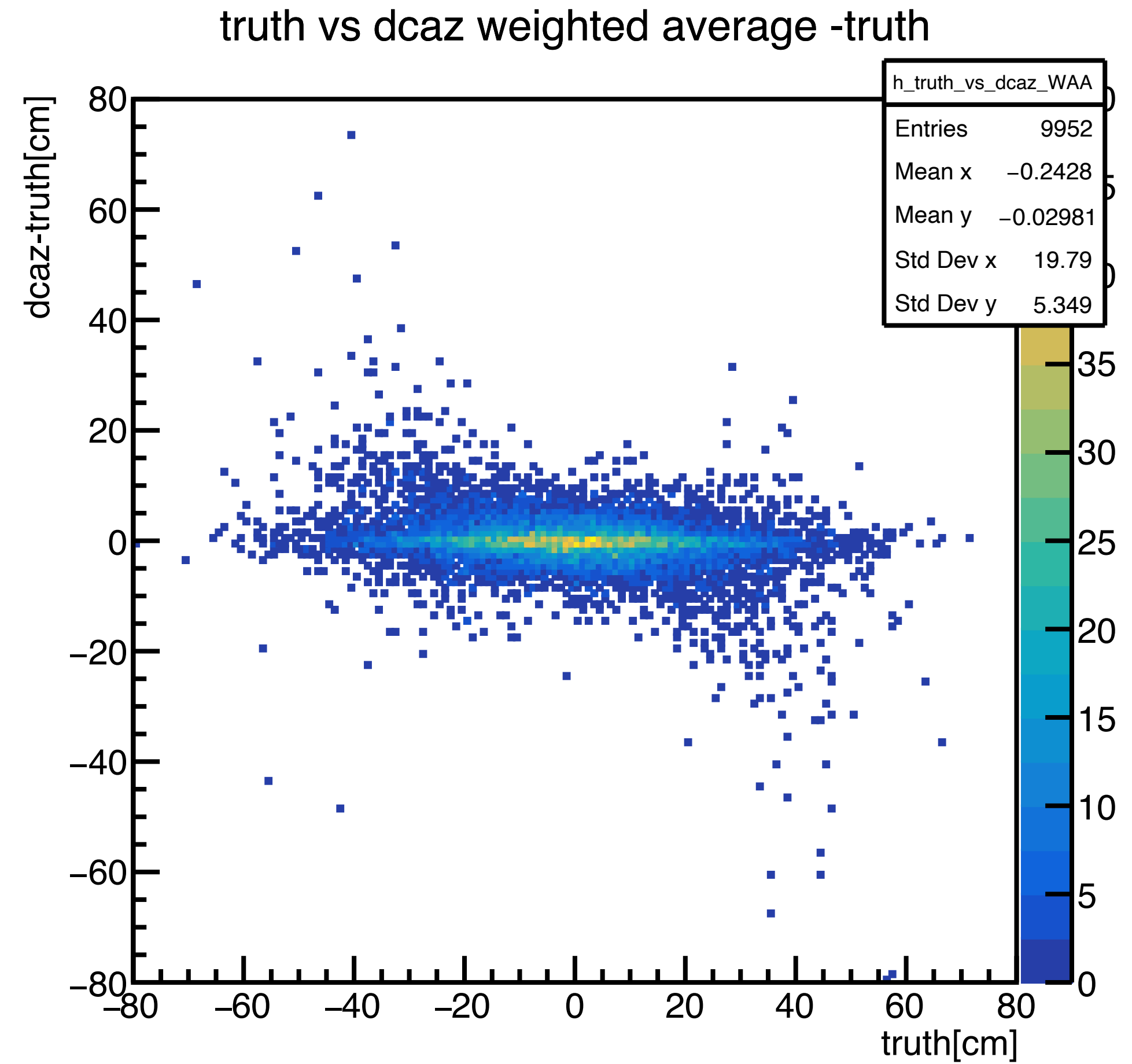
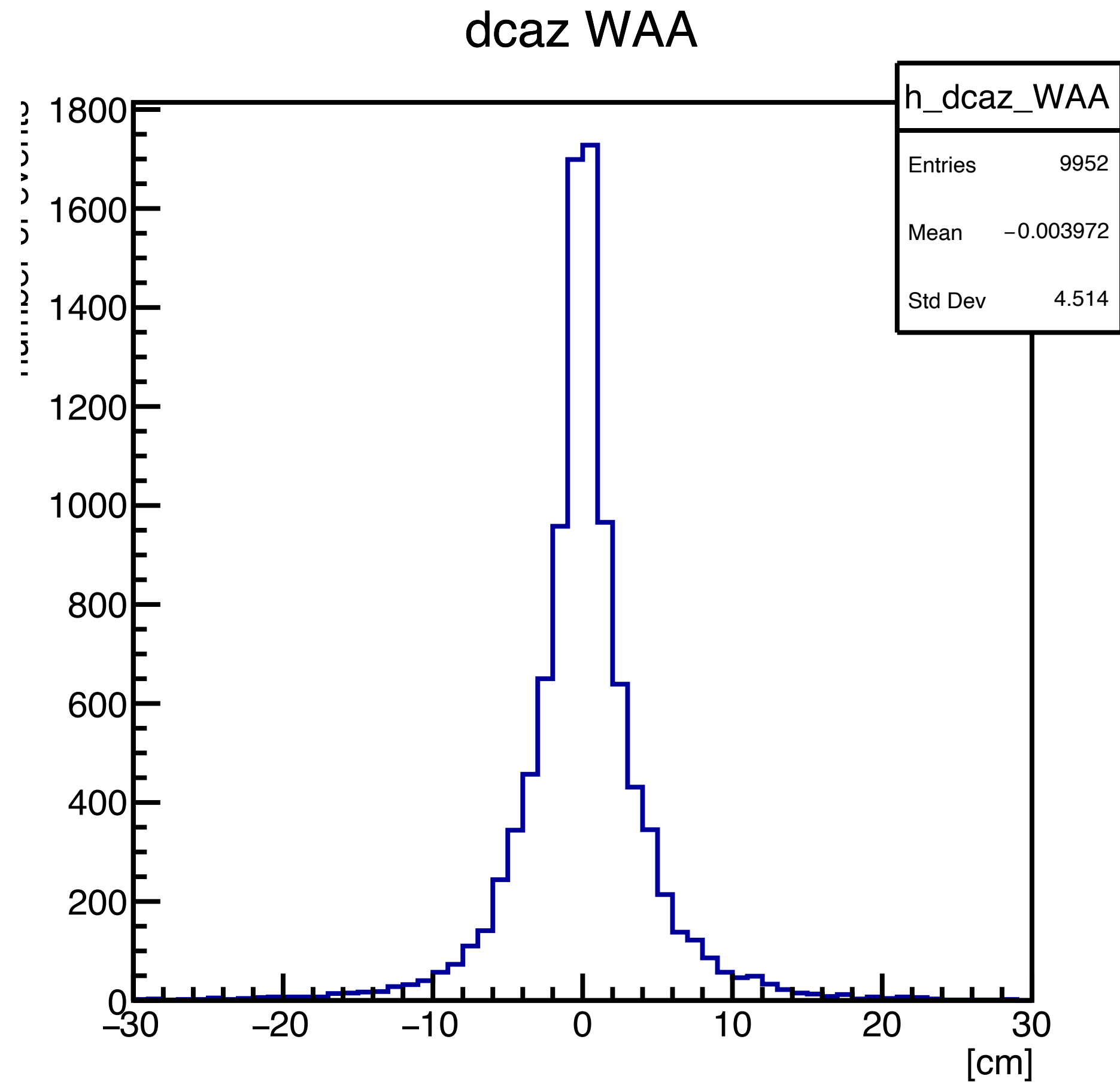
- $$L = \sum_{i=1}^n \frac{(DCAz_i - V_z)^2}{\sigma_i^2} \quad (n = \text{トラック数})$$

- $$\frac{\partial L}{\partial V_z} = 0 \text{ となるときの } V_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \text{ を求める}$$

→平均になるはず

- これをイベント数分繰り返す

# DCAz座標を用いた加重平均法で求めたz\_vtx-truth z\_vtx VS truth z\_vtx



ヒットのZ座標、トラックの傾きaを用いた加重平均法でz\_vtxを求める

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{(Z_{ij} - (a_i(r_{ij} - r_0) + V_z))^2}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \quad (n = \text{トラック数}, r_0 = \sqrt{x_{vtx}^2 + y_{vtx}^2})$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{-2Z_{ij}}{\sigma_{Z_{ij}}^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 a_i(r_j - r_0) + 2 \cdot 2nV_z = 0、$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{-2Z_{ij}(r_i - r_0)}{\sigma_{Z_{ij}}^2} + \sum_{j=1}^2 a_i(r_j - r_0)^2 + 2V_z \sum_{j=1}^2 (r_j - r_0) = 0 \text{となるときの } V_z, a_i \text{を求める}$$



# ヒットのZ座標、トラックの傾きaを用いた加重平均法でz\_vtxを求める

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{(Z_{ij} - (a_i(r_{ij} - r_0) + V_z))^2}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \quad (n = \text{トラック数}, r_0 = \sqrt{x_{vtx}^2 + y_{vtx}^2})$$

$$\frac{\partial L}{\partial V_z} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{-2Z_{ij}}{\sigma_{Z_{ij}}^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 a_i(r_j - r_0) + 2 \cdot 2nV_z = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{-2Z_{ij}(r_i - r_0)}{\sigma_{Z_{ij}}^2} + \sum_{j=1}^2 a_i(r_j - r_0)^2 + 2V_z \sum_{j=1}^2 (r_j - r_0) = 0 \text{ となるときの } V_z, a_i \text{ を求める}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2n & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & 0 & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0)^2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) & 0 & 0 & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_z \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{1j}(r_{1j} - r_0)}{\sigma_{Z_{1j}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{2j}(r_{2j} - r_0)}{\sigma_{Z_{2j}}^2} \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}(r_{ij} - r_0)}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \end{pmatrix}$$

# ヒットのZ座標、トラックの傾きaを用いた加重平均法でz\_vtxを求める

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2n & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & 0 & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0)^2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) & 0 & 0 & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_z \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{1j}(r_{1j} - r_0)}{\sigma_{Z_{1j}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{2j}(r_{2j} - r_0)}{\sigma_{Z_{2j}}^2} \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}(r_{ij} - r_0)}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2n & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0) & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{1j} - r_0)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0) & 0 & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{2j} - r_0)^2 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) & 0 & 0 & \cdots & 2 \sum_{j=1}^2 (r_{ij} - r_0) \end{pmatrix} = A \text{ とすると、 } A^{-1}A \times \begin{pmatrix} V_z \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{1j}(r_{1j} - r_0)}{\sigma_{Z_{1j}}^2} \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{2j}(r_{2j} - r_0)}{\sigma_{Z_{2j}}^2} \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^2 \frac{Z_{ij}(r_{ij} - r_0)}{\sigma_{Z_{ij}}^2} \end{pmatrix}$$

# まとめ

計算方法	Std
ピーク法(誤差なしDCAz座標)	1.742
平均法(誤差なしDCAz座標)	3.214
1 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差なしDCAz座標)	1.532
3 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差なしDCAz座標)	1.718
ピーク法(誤差(全範囲)ありDCAz座標)	1.534
平均法(誤差(全範囲)ありDCAz座標)	2.148
1 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差(全範囲)ありDCAz座標)	1.082
3 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差(全範囲)ありDCAz座標)	1.707
ピーク法(誤差( $\sqrt{12}$ )ありDCAz座標)	1.423
平均法(誤差( $\sqrt{12}$ )ありDCAz座標)	2.119
1 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差( $\sqrt{12}$ )ありDCAz座標)	0.964
3 $\sigma$ の範囲内の平均法(誤差( $\sqrt{12}$ )ありDCAz座標)	1.645
ヒットのz座標と傾きaの加重平均	22.23