

2002年度 修士学位論文

$\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊における $\pi^- \pi^0$ スペクトラル関数 測定

奈良女子大学大学院人間文化研究科
物理科学専攻 高エネルギー物理学研究室
平野 有希子

2003年2月5日

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	$\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊に関する物理	5
2.1	タウの物理	5
2.1.1	タウ (τ) レプトン	5
2.1.2	$\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊の特性	7
2.2	ミュオンの異常磁気モーメント: $g - 2$	8
2.3	スペクトラル関数 ($\nu \pi \pi^0(s)$)	12
2.4	$g - 2$: これまでの理論値と実験値の比較	13
第 3 章	Belle 実験装置	15
3.1	KEKB 加速器	15
3.2	Belle 検出器	18
3.2.1	粒子崩壊点測定器 (SVD; Silicon Vertex Detector)	21
3.2.2	中央飛跡検出器 (CDC; Central Drift Chamber)	21
3.2.3	エアロジェルチェレンコフカウンター (ACC; Aerogel Čerenkov Counter)	23
3.2.4	飛行時間測定器 (TOF; Time of Flight)	25
3.2.5	電磁カロリメータ (ECL; Electromagnetic Calorimeter)	25
3.2.6	K_L, μ 粒子検出器 (KLM)	28
3.2.7	Belle トリガーシステム	28
3.2.8	データ収集システム (DAQ)	30
第 4 章	事象選別	31
4.1	解析に用いたデータ	31
4.2	$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象選別	31
4.2.1	τ -pair 事象選別 1 (tau skim)	34
4.2.2	τ -pair 事象選別 2	35
4.3	$\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 事象選別	39
4.3.1	π^0 の再構成	42
4.3.2	$\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊の選別	42
4.3.3	$\pi^- \pi^0$ の不変質量分布 ($M_{\pi^\pm \pi^0}^2$)	47

第 5 章	$\pi^-\pi^0$ スペクトラル関数 測定	57
5.1	unfolding	57
5.2	SVD unfolding プログラムのテスト	60
5.2.1	unfolding のテストに用いたデータ	60
5.2.2	unfolding プログラムに対するテストの結果	62
5.2.3	unfolding で得られた分布の fit と真の分布との比較	62
5.3	データを用いた $\pi\pi^0$ の不変質量分布 ($(M_{\pi\pi^0})^2$) の unfolding	67
5.3.1	unfolding に使用したデータ	67
5.3.2	Breit-Wigner 関数の定義	72
5.3.3	unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布と Breit-Wigner による fit	75
5.4	スペクトラル関数とパイオンの構造因子 分布	79
5.4.1	スペクトラル関数 ($v^{\pi\pi}(s)$)	79
5.4.2	パイオンの構造因子 ($ F_\pi ^2$)	82
5.5	ミュオンの異常磁気モーメントのハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{had,LO}$)	82
第 6 章	結果と考察	85
付 録 A	解析における補足	87
A.1	事象選別に関する補足	87
付 録 B	SVD unfolding	89
B.1	簡単な例	89
B.2	SVD unfolding における smoothing(regularization)	90
B.3	unfolding に関する分布	92
B.3.1	SVD unfolding のテスト	92
B.3.2	データの unfolding	93
付 録 C	誤差の取り扱い	95
C.1	fitting における誤差と χ^2 の取り扱い	95
C.2	ハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{\pi\pi}$) を求める際の誤差の取り扱い	97
C.3	fitting に用いた変数間の相関関係	98
付 録 D	崩壊分岐比	99
付 録 E	他の実験	103

目次

2.1	τ におけるハドロニックな崩壊	8
2.2	ミューオンの異常磁気モーメントファインマン図	10
2.3	ハドロンの真空偏極と e^+e^- 衝突のデータとの関係	10
2.4	e^+e^- のデータとタウ粒子のハドロニックな崩壊	11
3.1	KEKB 加速器	16
3.2	KEKB 加速器のルミノシティ	17
3.3	Belle 測定器	18
3.4	Belle 測定器の構造	20
3.5	SVD の構造	21
3.6	エネルギー損失	22
3.7	CDC の構造	23
3.8	ACC の構造	24
3.9	ACC カウンターモジュールの構造	24
3.10	CsI(Tl) カウンター	26
3.11	ECL の断面図	27
3.12	シャワーの再構成	28
3.13	Belle トリガーシステム	29
3.14	DAQ システム	30
4.1	事象選別の流れ	32
4.2	Missing Mass	37
4.3	Missing Mass と Missing Angle の 2 次元 plot	38
4.4	アコプナリティ角	39
4.5	τ -pair 事象の例 (x-z 平面)	40
4.6	τ -pair 事象の例 (x-y 平面)	41
4.7	各運動量における光子 2 つの分解能	43
4.8	事象の半球図	43
4.9	π^0 シグナル分布	46
4.10	π^0 シグナル分布 (log)	47
4.11	シグナル領域とサイドバンド領域における $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布	48
4.12	モンテカルロにおける、シグナル領域とサイドバンド領域の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布	49

4.13	π^0 の運動量分布	50
4.14	π^0 の運動量分布の $R = \frac{Data}{MC} - 1$ plot	50
4.15	π^- の運動量分布図	51
4.16	π^0 の運動量分布の $R = \frac{Data}{MC} - 1$ plot	51
4.17	π^0 運動量ごとの $S_{\gamma\gamma}$ 図	52
4.18	$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布	54
4.19	$\pi^\pm\pi^0$ の質量ごとの $S_{\gamma\gamma}$ 図	55
5.1	unfolding の流れ	61
5.2	SVD unfolding のテストにおける $\log \frac{d_i}{\sigma_{d_i}} $ 図	63
5.3	SVD unfolding のテストにおいて得られた分布	64
5.4	$\mathbf{X}^{test} - \mathbf{X}^{unfold}$ 図	64
5.5	unfolding において cutoff 変数が小さすぎる場合の分布	65
5.6	cutoff 変数が小さすぎる場合の $\mathbf{X}^{test} - \mathbf{X}^{unfold}$ 図	65
5.7	unfolding において cutoff 変数が大きすぎる場合の分布	65
5.8	cutoff 変数が小さすぎる場合の $\mathbf{X}^{test} - \mathbf{X}^{unfold}$ 図	65
5.9	unfolding した分布を BW(K&S モデル) で fit した図	66
5.10	$\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu$ 崩壊のモンテカルロをでの $(M_{\pi\pi^0})^2 _{generate} .V.S. (M_{\pi\pi^0})^2 _{observed}$ plot.	69
5.11	モンテカルロで見積もった $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲ごとアクセプタンス	70
5.12	モンテカルロから得た (X_{ini}) 分布	71
5.13	$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 (Bin 幅は $0.05(GeV)^2$)	71
5.14	$\log \frac{d_i}{\sigma_{d_i}} $ 図	76
5.15	unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布。(K&S モデルによる fit)	77
5.16	unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布。(G&S モデルによる fit)	78
5.17	スペクトラル関数 $(v^{\pi\pi}(s))$ 分布	81
5.18	パイオンの構造因子 $(F_\pi ^2)$ 分布	83
A.1	MC において $m_\rho = 775.3 MeV$ を用いた場合の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布	87
A.2	$(M_{\pi\pi^0})^2$ の $\frac{DATA}{MC} - 1$ plot	87
A.3	MC において $m_\rho = 769.3 MeV$ を用いた場合の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布	88
A.4	$(M_{\pi\pi^0})^2$ の $\frac{DATA}{MC} - 1$ plot	88
B.1	SVD unfolding のテストにおける singular value s_i 分布	92
B.2	SVD unfolding のテストにおける χ^2 分布	92
B.3	SVD unfolding のテストにおける χ^2 分布	92
B.4	response matrix 分布 (event)	93
B.5	response matrix 分布 (確率)	93
B.6	singular value s_i 分布	93

C.1 本解析で用いた error matrix の逆行列	96
C.2 本解析で用いた error matrix	97

表 目 次

2.1	相互作用一覧表	5
2.2	タウ粒子の崩壊モード一覧表	6
2.3	式 2.17 の中で使われている値	14
3.1	KEKB 加速器のパラメーター	16
3.2	Belle 検出器のパラメータ	19
3.3	$10^{34}_{cm^{-2}s^{-1}}$ のルミノシティにおける各事象の断面積とトリガー頻度	29
4.1	シミュレーション使用プログラム	33
4.2	τ -pair 事象選別条件	39
4.3	$\tau^{\pm} \rightarrow \pi\pi^0\nu_{\tau}$ 事象選別	45
4.4	MC における ρ , ρ' の値	53
5.1	unfolding のテストにおける fit の結果	63
5.2	unfolding で得られた質量分布を fit した結果	79
5.3	fit で得られた結果について他の実験との比較	80
5.4	スペクトラル関数の中で使われる値	80
D.1	崩壊分岐比の系統誤差	101
E.1	他の実験との比較	103

第1章 序論

現在、様々な素粒子現象を記述する理論として標準模型と呼ばれる理論が大きな成功をおさめている。標準理論は、素粒子として知られているクォークやレプトン間に働く3つの力(強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用)の記述をもとにしており、多くの素粒子現象を精度よく説明する理論として知られている。しかしながら、標準理論の中ではゼロとされていたニュートリノの質量が存在する強い証拠が最近観測されるなど、標準理論を越える現象が報告され始めている。標準理論のより精密な検証と、それを越える物理を探求することは高エネルギー物理学の重要な課題である。

ニュートリノの質量に代表されるような素粒子の質量の起源の問題とともに、素粒子物理学の大きな謎として残っている問題の一つに粒子・反粒子間の対称性の破れ、すなわち CP 対称性の破れの問題がある。この CP 対称性の破れは長い間中性 K 中間子系においてのみ観測されていた。しかしながら、素粒子の標準模型の枠内に組み込まれている小林・益川理論によれば、第3世代の重いクォークである b クォークを含む B 中間子系において、大きな CP 対称性の破れがあることが期待されている。

この B 中間子系での CP 対称性の破れを観測し、小林・益川理論の検証を目的として建設されたのが、高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の電子・陽電子衝突型加速器、KEKB 加速器と、その衝突点に設置された大型検出器、Belle 検出器である。KEKB 加速器は、大量の B 中間子・反 B 中間子の生成を実現するために、非常に強いビーム強度を実現するように設計された加速器である。2002 年現在、本加速器は衝突型加速器として世界最強のルミノシティ(ビーム強度) $\mathcal{L} = 8 \times 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}$ を達成している。この量は年間に約 10^8 個の B 中間子・反 B 中間子を作ることに相当する。このように B 中間子・反 B 中間子を工場の様に大量に作り出すことから、KEKB 加速器は B-ファクトリーとも呼ばれている。2002 年夏には、検出した 8500 万個の B 中間子と反 B 中間子の崩壊データを基に、両者の崩壊にはわずかな違いが存在し、B 中間子系において CP 対称性の破れがたしかに見られることを本実験においてはじめて確認することに成功した。

KEKB 加速器では、同時に $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 反応を通じて非常に高統計 (10^8 個/年) のタウ (τ) 粒子を得ることができる。ここで生成されるタウ粒子の量は、従来の加速器で得られたタウ粒子の数より、2桁ほど多い量であり、KEKB は B-ファクトリーであると同時に、タウ粒子を多量に作り出す τ -ファクトリーとしても重要なものである。多量のタウ粒子を用いて Belle 実験では これまでに、レプトン系における CP 非保存現象の探索 [25][36] や、 $\tau \rightarrow \mu\gamma$, $\tau \rightarrow lK_s$ のようにレプトン数保存則を破る崩壊の探索など、

標準理論を越える物理現象の研究が進められている。

本論文では、Belle 検出器が収集した多量のタウ粒子対事象を用いて、様々なタウ粒子の崩壊の中で特にタウ粒子が 2π のハドロン系へ崩壊する

$$\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau \quad (1.1)$$

過程に関する解析結果について報告する。

一般に、タウ粒子がハドロンの崩壊する崩壊分岐比やその終状態のハドロンの質量分布に関する実験データは、低いエネルギー領域のハドロン状態を記述する基礎的なデータとして非常に重要である。特にそれは、第2章でも述べるように、ミュー (μ) 粒子の異常磁気モーメント ($g-2$) の理論的計算や強い相互作用の結合定数 α_s の決定に大きな貢献をしてきた。

今回の解析では、 $\pi\pi^0$ 系の質量分布を精度よく求めることによって、特にミュー粒子の異常磁気モーメント $g-2$ の計算に必要な精度の高い $\pi\pi^0$ 系のスペクトラル関数を提供することが目的である。これは $g-2$ の理論計算に大きく寄与するもので、「標準理論」の精密な検証に重要な役割を果たしている。

ミュー粒子の異常磁気モーメント $g-2$ の最新の最も精度の高い実験結果は、2002年9月に、ブルックヘブン国立研究所 (BNL) で行われた E821 実験より報告されており [2]、その測定結果は

$$a_\mu^{exp} = (11659203 \pm 8) \times 10^{10} \quad (1.2)$$

となっている。

一方 $g-2$ の理論計算については、2003年1月に、M. Davier、S. Eidelman らによって報告された [6]。詳しくは第2章でのべることとし、結果のみを書くと式 1.2 の BNL の測定結果と比較した結果は、

$$\begin{cases} e^+e^- \text{ のデータを用いた場合} & \cdots (11659169.3 \pm 7.0 \pm 3.5 \pm 0.4) \times 10^{-10} \quad (3.0\sigma) \\ \tau \text{ のデータを用いた場合} & \cdots (11659193.6 \pm 5.9 \pm 3.5 \pm 0.4) \times 10^{-10} \quad (0.9\sigma) \end{cases} \quad (1.3)$$

というものである。この結果は、 τ のデータを用いた場合は理論値と実験値は一致しているのに対し、 e^+e^- のデータを用いた場合では、わずかに違いが見られることを示している。

$g-2$ の理論計算で、最も不定性を持つ部分は、強い相互作用をする粒子を仮想的に作り出すハドロニックな部分を含んだ補正項 (ハドロンの真空偏極項) の計算である。この項について純粋な理論計算をすることは現時点では不可能であり、実験的に測定されたデータを用いて補正項が計算されている。実験データとしては、1GeV 以下の $e^+e^- \rightarrow$ ハドロ

ン反応の生成断面積やタウレプトンのハドロンを含む崩壊(セミレプトニック崩壊)過程である $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊から得られるスペクトル関数が用いられている。

スペクトラル関数は、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ の崩壊分岐比と $\pi^\pm \pi^0$ 系の質量分布の積によって表せるため、この2つの値を精密に測定することが重要である。Belle 実験のデータを用いた $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊の崩壊分岐比の測定に関する報告が片岡真由子によって行われている [35]。本論文では、その解析を継承しさらに $\pi^\pm \pi^0$ 系の質量分布に関する詳しい研究結果を報告する。

以下、第2章では理論的な背景として、タウ粒子と $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊に関する物理にふれ、その後、タウの実験データとミュー粒子異常磁気モーメント $g-2$ の理論計算との関係について述べる。第3章では今回の解析に用いた実験データを収集した KEKB 加速器と Belle 検出器の紹介を行う。続いて実際の解析として、第4章では $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊を選ぶために用いた事象選別について述べ、第5章では $\pi^\pm \pi^0$ 系の質量分布の測定とスペクトル関数の測定について報告する。最後に第6章ではまとめと考察を行う。

第2章 $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊に関する物理

2.1 タウの物理

1975年、アメリカのSLAC(スタンフォード大学線形加速器センター)のマーチン・パール、ゲイリー・フェルドマンらによって、タウ粒子が発見された。彼らはこれを”異常なレプトン生成の存在する証拠について”という論文で発表した。当時はタウレプトンについて直接的な理論からの予言は全くなく、真の意味での新発見であった。タウ粒子はレプトン族の第3世代目に位置し、第3世代の粒子の中では、クォーク族・レプトン族を通じて一番最初に発見された粒子である。第3世代目の粒子の発見は、クォーク族とレプトン族の比較から、当時クォークも3世代が存在するという期待をもたせた。実際、1977年には第3世代のクォークで電荷 $-\frac{1}{3}$ をもつボトム(b)クォークが、1994年には電荷 $\frac{2}{3}$ のトップクォーク(t)が発見されている。

2.1.1 タウ(τ)レプトン

タウ粒子の属するレプトン属には、次にあるように6種類3世代の粒子が存在する。

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

これらレプトンの共通の特徴として、強い相互作用をせず電磁相互作用と弱い相互作用を行うことがあげられる。

相互作用については表2.1にまとめた。電磁相互作用は、光子(γ)を媒介し、無限の距離に到達することができる。また弱い相互作用は短距離でしか到達できず、 W^\pm ボソンや Z^0 ボソンを媒介する。荷電カレント反応($l \rightarrow \nu_l$)の際 W^\pm が放出され、中性カレント反応の際 Z^0 が放出される。

相互作用	媒介粒子(質量)	到達距離[m]	力を感じるもの
強い相互作用	グルーオン(0)	$\leq 10^{-15}$	色荷
弱い相互作用	$W^\pm(80\text{GeV}), Z^0(90\text{GeV})$	10^{-18}	弱電荷
電磁相互作用	光子 $\gamma(0)$	∞	電荷
重力	Graviton	∞	質量

表 2.1: 相互作用一覧表

タウ粒子は第3世代に属し、レプトンの中でも質量が最も大きく $1.78 \text{ GeV}/c^2$ であり、寿命は $(290.6 \pm 1.1) \text{ fs}$ である。このように質量が重いことから、レプトンの中で唯一、終状態にハドロンを含んだ崩壊をすることができる粒子である。

KEKB 加速器のような電子・陽電子衝突型加速器では、タウ粒子は $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 反応によって生成される。KEKB 加速器の重心系のエネルギーは 10.58 GeV に合わされており、このエネルギーでのタウ粒子対の生成断面積は、

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-) = 0.91 \text{ nb} \quad (2.2)$$

である。この断面積は B 中間子対生成断面積¹ とほぼ同じであり、一年間で B 中間子対とほぼおなじ量 (10^8 個) のタウ粒子が生成できる。生成されたタウ粒子はそれぞれ平均 $240 \mu\text{m}$ 飛び、その後以下に述べるような終状態へ崩壊する。

崩壊過程	崩壊分岐比 (%)
$e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$	17.84 ± 0.06
$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$	17.37 ± 0.06
$\pi^- \nu_\tau$	11.06 ± 0.11
$\pi^- \pi^0 \nu_\tau$	25.41 ± 0.14
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau (ex. K^0)$	9.17 ± 0.14
$\pi^- 3\pi^0 \nu_\tau (ex. K^0)$	1.08 ± 0.1
$h^- 4\pi^0 \nu_\tau (ex. K^0)$	0.16 ± 0.06
$K^- \pi^0 \nu_\tau$	0.450 ± 0.03
$\pi^- K^0 \nu_\tau$	0.89 ± 0.04

表 2.2: タウ粒子の崩壊モード一覧表

タウ粒子は表 2.2 に示すようにさまざまな崩壊過程をもつ。それらの崩壊過程のうち、終状態に τ 以外の軽いレプトンのみを含んだ崩壊過程 ($\tau \rightarrow e \nu_e \nu_\tau$, $\tau \rightarrow \mu \nu_\mu \nu_\tau$) をレプトニック崩壊と呼ぶ。また終状態にハドロン (π, K やその共鳴状態) を含む崩壊をセミレプトニック崩壊と呼ぶ。タウ粒子の主な崩壊過程と現在知られている崩壊分岐比を表 2.2 に示した²。

タウ粒子が $e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$ や $\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$ のような終状態へ崩壊するレプトニック崩壊の崩壊幅は

¹ $\sigma(e^+e^- \rightarrow B\bar{B}) = 1.05$

²表の値は Particle Data Group 2002 から得た。

よく理解されており、

$$\Gamma_{\tau \rightarrow l} \equiv \Gamma(\tau^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l \nu_\tau) = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_l^2}{m_\tau^2}\right) r_{EW}, \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで G_F はフェルミ結合定数、 m_l は電子の質量 (m_e) またはミュー粒子の質量 (m_μ)、 $f(x) = 1 - 8x + 8x^3 + x^4 - 12x^2 \log x$ である。特に電子に崩壊する場合電子の質量はタウ粒子に比べて大変小さいため、ほぼ $f(x) = 1$ となる。 $r_{EW} = 0.996$ はフェルミ結合定数 G_F の中に含まれてない輻射補正である。

この式 2.3 の崩壊幅を用いて、レプトニックな崩壊の崩壊分岐比 $B_{\tau \rightarrow l}$ は、

$$B_{\tau \rightarrow l} = \frac{\Gamma_{\tau \rightarrow l}}{\Gamma_{tot}}, \quad (l = e, \mu) \quad (2.4)$$

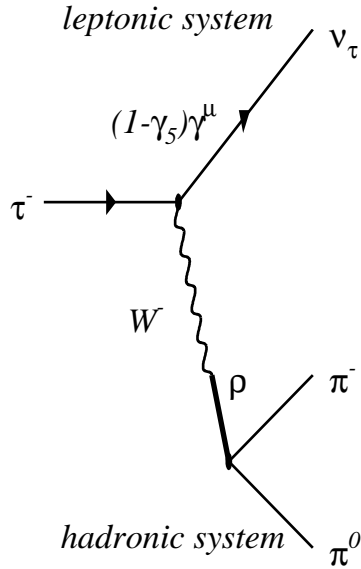
で与えられる。ここで、 Γ_{tot} はタウ粒子が崩壊するすべてのパターンの崩壊幅の和である。タウ粒子の寿命 τ_τ と Γ_{tot} は $\Gamma_{tot} = \frac{1}{\tau_\tau}$ の関係がある。

2.1.2 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の特性

小節 2.2.1 で述べたように、タウ粒子は終状態でハドロンに崩壊するのに十分な質量を持った、唯一のレプトンである。本解析で用いた $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊もこのひとつであり、崩壊の模式図を図 2.1 に示す。この図からもわかるように、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊は、強い相互作用を受けないレプトンだけの部分と、ウィークカレントを経て 2π の状態へ変換するハドロニックな系の部分とを分けて扱うことができる。弱い相互作用のみの部分はよく理解されているので、後で述べるように $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊は、低いエネルギー ($\sim 1\text{GeV}$) 付近のハドロン状態の情報を得るシステムとして注目されている。

一般に、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ 崩壊のように終状態に、2つの擬スカラーメソンを含むハドロニックな状態への崩壊では、終状態のハドロン系は一般に $J^P=0^+$ および 1^- のスピンパリティ量子数をもつ可能性がある。しかし、ベクトルカレントの保存則 (Conserve Vector Current, CVC) により、 $J^P=0^+$ の状態は禁止される。したがって、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ 崩壊では比較的質量の低いベクトルメソン $\rho(770)$ を通じた崩壊 $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau$ が、主な崩壊過程となっている。また $\rho(770)$ の励起状態である $\rho'(1450)$ や $\rho''(1700)$ も観測されている。さらにベクトルカレントの保存を仮定すると、この $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ 崩壊での $\pi\pi^0$ 系の質量スペクトラムと $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 反応で生成される $\pi^+\pi^-$ 系の質量スペクトラムを関連づけることができる。

次に述べるように、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比や $\pi\pi^0$ 系の質量スペクトラムの精密なデータはミューオンの異常磁気能率 $g_\mu - 2$ の理論計算の精度をあげる上で非常に重要である。

図 2.1: τ におけるハドロニックな崩壊

2.2 ミューオンの異常磁気モーメント : $g - 2$

質量 m 電荷 e の粒子の磁気能率は g - 因子を用いて、

$$\mu = g \cdot \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{S} \quad (2.5)$$

で表される。スピン $(S)_{\frac{1}{2}}$ のディラック粒子の場合 $g = 2$ である。しかしながら、実際のミューオンでは磁気能率 g_μ は 2 からプラス方向にずれていることが知られており、そのずれ a_μ は

$$a_\mu \equiv \frac{g_\mu - 2}{2} \quad (2.6)$$

と定義される。これは、ミューオンの異常磁気モーメントと呼ばれている。ミューオンの異常磁気モーメントは、電磁量子力学の正しさを証明するものとして、昔から精密な測定が試みられてきた [1][2]。その最新の実験結果が 2002 年 9 月、アメリカの BNL(ブルックヘブン国立研究所) で行われているミューオンの $g - 2$ 実験 (E821 実験) から報告された [2]。その値は

$$a_\mu^{exp} = 11659203 \pm 8 \times 10^{-10} \quad (2.7)$$

である。

一方、ミューオンの異常磁気モーメントにおける理論値的計算は、図 2.2 に示すような様々なダイアグラムの寄与の足し合わせとして与えられる。

それらは大きく、図 2.2.(a) のような純粋な電磁相互作用 (a_μ^{QED})、図 2.2.(b) のような弱い相互作用の影響 ($a_\mu(EW)$)、そして、現在理論にもっとも大きな不定性をもたらす図 2.2.(c)、図 2.2.(d) に示されるハドロニックな寄与 (a_μ^{hadron}) に分けられる。これは、

$$a_\mu = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{hadron} \quad (2.8)$$

と書き表せ、さらにハドロロンが寄与する項 a_μ^{hadron} については、

$$a_\mu^{hadron} = a_\mu^{had,LO} + a_\mu^{had,HO} + a_\mu^{had,LBL} \quad (2.9)$$

と書き表せる。

ここで、 a_μ^{QED} は純粋な電磁相互作用による項、 a_μ^{EW} は弱い相互作用による項、 $a_\mu^{had,LO}$ 、 $a_\mu^{had,HO}$ 、 $a_\mu^{had,LBL}$ はいずれもハドロロンが寄与する項であり、順に、比較的低いエネルギー領域 (lowest-order) でのハドロロンの真空偏極による項、高いエネルギー領域 (higher-order) でのハドロロンの真空偏極による項、光子光子散乱による項 (light-by-light) を示す。ハドロロンの真空偏極の項は純粋な理論的計算が不可能なため、低エネルギーでの e^+e^- 衝突の断面積を量子力学的に考えなおすことで計算がなされる。この方法が現在のところ最も信頼できる方法である。(図 2.3 のようにハドロロン真空偏極と e^+e^- 事象は 1 対 1 の対応関係にある。) 一方、後者 (光子光子散乱) に関する補正は適当な実験値を使って表すことができる量であるため理論的に計算されている。よって、特に補正の大きいハドロロン真空偏極項について以下に述べる。

ミューオンの異常磁気モーメントのハドロロン真空偏極の項のうち、大部分を占めるのは 1.8GeV 以下の比較的エネルギーの低い領域 ($a_\mu^{had,LO}$) であり、ハドロロンの真空偏極による項のうち 91% を占めている。この値 ($a_\mu^{had,LO}$) は、実験的に

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot e^+e^- \text{ 対消滅 } (e^+e^- \rightarrow hadron) \text{ の散乱断面積} \\ \cdot \text{ タウ粒子のハドロニックな崩壊} \end{array} \right.$$

の 2 つを用いて計算されている。アイソスピン保存則が完全に成り立つ場合、 e^+e^- のデータとタウ粒子のハドロニックな崩壊によるデータは密接な関係にあり、タウ粒子の崩壊によるデータもまたハドロロン真空偏極の計算に用いることができる。これにより、 e^+e^- のデータを統計的に補うことができ、より精度の高い標準理論の予言を得ることができる。(図 2.3 の (a) の Hadron の部分と (b) の ρ の部分を結び付けて考えることができる。)

1.8GeV 以下の比較的エネルギーの低い領域におけるハドロロンの真空偏極項は、式 2.10 で表されるように、終状態に含まれる π の数によってその寄与を分けて考えることができる。

$$a_\mu^{had,LO} = a_\mu^{\pi\pi} + a_\mu^{4\pi} + \dots \quad (2.10)$$

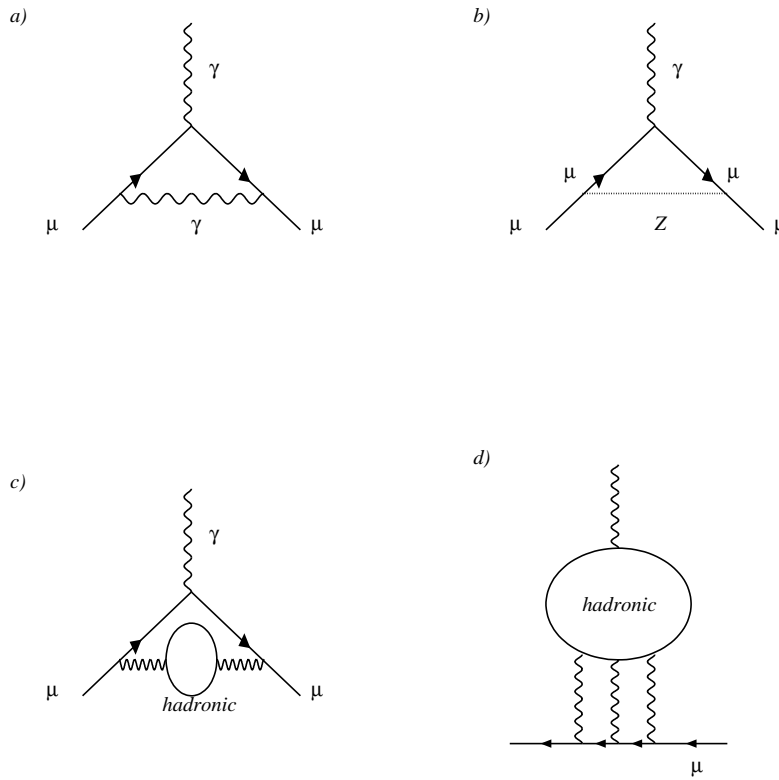


図 2.2: ミューオンの異常磁気モーメントファインマン図。(a)は純粋な電磁相互作用 (a_μ^{QED}) の中でも最低次の項であり、電子の場合もミューオンの場合も同じである。(b)は弱い相互作用の影響 (a_μ^{EW}) を示し、この影響は理論的な不定性が少ない。(c)はハドロン真空偏極によるもの、(d)は4個の光子間の光子光子散乱が、ハドロンを媒介として起こることによる影響を示す。

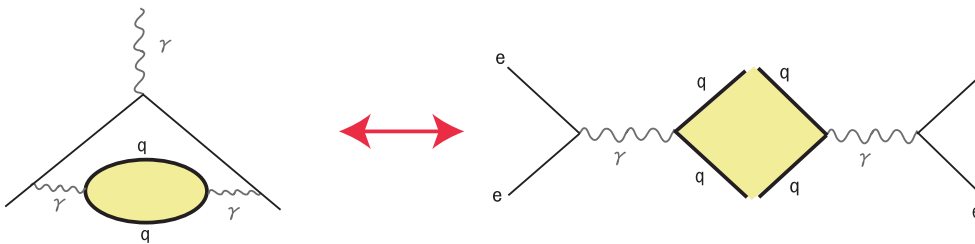


図 2.3: ハドロン真空偏極と e^+e^- 衝突のデータとの関係

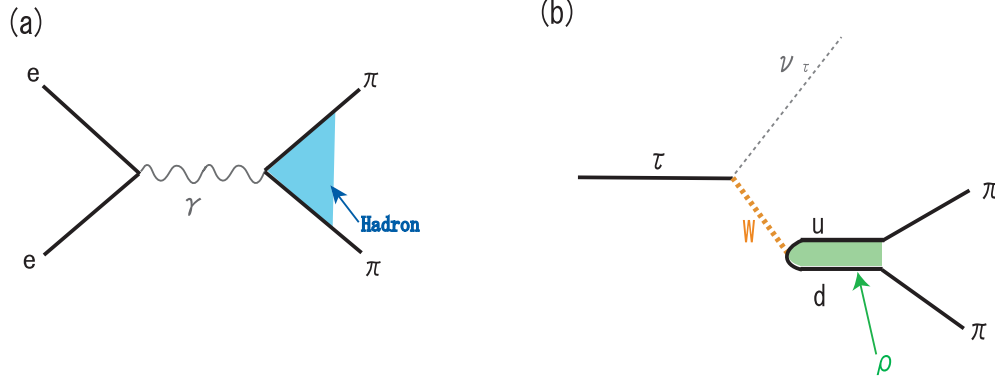


図 2.4: e^+e^- のデータとタウ粒子のハドロニックな崩壊

なかでも、支配的なものは 73% を占める $\pi\pi$ 系 (終状態に π が 2 つある系) の寄与 ($a_{\mu}^{\pi\pi}$) であり³、本解析で用いた $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$ 崩壊はこの寄与を求めるのに大きく貢献する。よって、以下では特に $\pi\pi$ 系の寄与 ($a_{\mu}^{\pi\pi}$) について述べる。

$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 反応の散乱断面積は以下のように書くことができる。

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \left(\frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{s} \right) v^{\pi\pi}(s), \quad (2.11)$$

ここで、 $s = q^2$ は e^+e^- の重心エネルギーの 2 乗、 $v^{\pi\pi}$ は、 $\pi^+\pi^-$ 系の「スペクトラル関数⁴」である。

スペクトラル関数は、ハドロニックな物理の情報を記述するもので、タウ崩壊から得られた $v^{\pi\pi^0}(s)$ と e^+e^- 崩壊の $v^{\pi\pi}(s)$ は、アイソスピン保存則が完全に成り立つ場合には CVC より、

$$v_{I=1}^{\pi\pi}(s) = v^{\pi\pi^0}(s) \quad (2.12)$$

の関係で結ばれている。よって、式 2.11 はタウ崩壊から得られたスペクトラル関数 $v^{\pi\pi^0}(s)$ を用いて、

$$\sigma_{(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)}^{I=1} = \left(\frac{4\pi^2 \alpha_{em}^2}{s} \right) v^{\pi\pi^0}(s), \quad (2.13)$$

と書き表すこともできる。

³ $a_{\mu}^{4\pi}$ は終状態に π 粒子が 4 つ含まれる $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 、 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ などからの寄与である。

⁴ 本論文では、スペクトラル関数の記述として、ALEPH 実験での定義を用いている。CLEO 実験におけるスペクトラル関数の定義は係数 π だけ ALEPH 実験での定義と異なっている ($v_{ALEPH}^{\pi\pi} = v_{CLEO}^{\pi\pi}$)。

ミュオンの異常磁気モーメントのハドロン真空偏極項のうち $\pi\pi$ 系からの寄与 ($a_\mu^{\pi\pi}$) スペクトル関数 $v^{\pi\pi}(s)$ を用いて、

$$a_\mu^{\pi\pi} = \frac{\alpha_{em}^2(0)}{\pi} \int_{4M_\pi^2}^{\infty} ds \frac{K(s)}{s} v^{\pi\pi}(s) \quad (2.14)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha_{em}(0)$ は微細構造定数である。 $K(s)$ は QED に関する既知の関数であり、

$$K(s) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + (1+x)^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{1+x}{1-x}\right) x^2 \ln x, \quad (2.15)$$

で与えられている。ここで x 、 β_μ は、ミュオン粒子の質量 M_μ の関数で、

$$x = (1 - \beta_\mu)/(1 + \beta_\mu)$$

$$\beta_\mu = (1 - 4M_\mu^2/s)^{\frac{1}{2}}$$

である。

このように、 $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊や $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 反応から得られる $\pi^+\pi^-$ 系のスペクトル関数 $v^{\pi\pi}$ を測定することによって、ミュオンの異常磁気モーメントのハドロン真空偏極項のうち $\pi\pi$ 系からの寄与 $a_\mu^{\pi\pi}$ を計算することができる。

本解析の最終目標としては、ミュオンの異常磁気モーメントについて、理論からの計算値を求め、式 2.7 にあるような実験値と比較することであるが、本解析では、その前段階として、ミュオンの異常磁気モーメントの項の中で最も不定性を残すハドロンの真空偏極項について考える。特に本論文では、ハドロンの真空偏極項の中でも最も支配的な $\pi\pi$ 系の寄与を $\tau \rightarrow \pi\pi^0 \nu_\tau$ 崩壊を用いて求める過程とその結果について報告する。

2.3 スペクトラル関数 ($v^{\pi\pi^0}(s)$)

小節 2.3.1 でふれたように、ミュオンの異常磁気能率のハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{had,LO}$) は、スペクトラル関数を用いて 2.14 式のように表せることから、ミュオンの異常磁気能率のハドロン真空偏極の項 ($a_\mu^{had,LO}$) を求めるにはまず、スペクトラム関数を得なければならないことがわかる。

$\tau \rightarrow \pi\pi^0 \nu_\tau$ 崩壊を用いると 2π ののスペクトラル関数は、

$$v^{\pi\pi^0}(s) = \frac{M_\tau^2}{6\pi|V_{ud}|^2 S_{EW}} \left[\left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right) \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \right]^{-1} \frac{B_{\pi\pi^0}}{B_e} \frac{1}{N_{\pi\pi^0}} \frac{dN_{\pi\pi^0}}{ds} \quad (2.16)$$

と書き表すことができる。ここで、 s は $(M_{\pi\pi^0})^2$ 、 M_τ は τ 粒子の質量、 $|V_{ud}|$ はカビボ-小林益川行列の成分、 S_{EW} は電弱相互作用による補正係数をそれぞれ示しており、これらは比較的よく知られた数である。 $B_{\pi\pi^0}$ は $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の崩壊分岐比であり、 B_e は $\tau \rightarrow e^-\nu_e\nu_\tau$ 崩壊の崩壊分岐比である。スペクトラル関数を得る上で必要となるのはこれらの崩壊分岐比と $\pi\pi^0$ 系の質量分布を求めることである。

上式中で

$$\frac{1}{N_{\pi\pi^0}} \frac{dN_{\pi\pi^0}}{ds}$$

が $\pi\pi^0$ 系の質量分布にあたり、この分布を精度よく求め、式 2.16 の関係からスペクトラル関数を得ることが本解析の目的である。

正確な $\pi\pi^0$ 系の質量分布を得るには、まず、実験データから $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ 崩壊を選別し、 $\pi\pi^0$ 系の質量分布を得て、それに対して検出器などから受ける効果を考慮して補正しなくてはならない。そのためには、検出器の効果や事象選別の効果を詳しく調べ、理解する必要がある。本論文では、この方法を詳しく記述するとともに、その結果について報告する。

2.4 $g-2$: これまでの理論値と実験値の比較

2.2 節、2.3 節で述べたような方法で、ミューオンの異常磁気モーメントの理論計算はなされる。

2003 年 1 月、この方法で計算された値が M. Davier、S. Eidelman、A. Höcker、Z. Zhang によって *CMD-2*、*ALEPH*、*CLEO* 等の実験データを総合して導かれた [6]。これが、現在報告されている標準理論の予言値の中では最も精度が高く、最新のものである。この結果を BNL、 $g-2$ 実験 (*E821* 実験) の最新の結果 (式 2.7) と比較した結果も報告され、以下のようにになっている。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \underline{e^+e^- \text{ のデータを用いた場合}} \\ \quad a_\mu^{SM} = (11659169.3 \pm 7.0_{(had)} \pm 3.5_{(LBL)} \pm 0.4_{(QED+EW)}) \times 10^{-10} \\ \quad a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM} = (33.7 \pm 11.2) \times 10^{-10} \quad (3.0\sigma) \\ \cdot \underline{\tau \text{ のデータを用いた場合}} \\ \quad a_\mu^{SM} = (11659193.6 \pm 5.9_{(had)} \pm 3.5_{(LBL)} \pm 0.4_{(QED+EW)}) \times 10^{-10} \\ \quad a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM} = (9.4 \pm 10.5) \times 10^{-10} \quad (0.9\sigma) \end{array} \right. \quad (2.17)$$

ここで、 a_μ^{SM} の誤差のうち、1 番目 (had) はハドロニックな寄与による誤差、(LBL) はハドロンの光子光子散乱による寄与、(QED+EW) は電弱相互作用からの寄与をそれぞれ示す。

また、ここで用いられた各項の値を表 2.4 にまとめた。表 2.4 中の a_μ^{EW} において、1 番目

表 2.3: 式 2.17 の中で使われている値

term	使用されている値
a_μ^{QED}	純粋な電磁相互作用による項 (11658470.6 ± 0.3) $\times 10^{-10}$
a_μ^{EW}	弱い相互作用による項 ($15.4 \pm 0.1 \pm 0.2$) $\times 10^{-10}$
$a_\mu^{had,LO}$	ハドロン真空偏極による項 (lowest-order) $\dots e^+e^-$ データ $\dots \tau$ データ ($684.7 \pm 6.0_{(exp)} \pm 3.6_{(rad)}$) ($709.0 \pm 5.1_{(exp)} \pm 1.2_{(rad)} \pm 2.8_{(SU(2))}$)
$a_\mu^{had,HO}$	ハドロン真空偏極による項 (higher-order) (-10.0 ± 0.6) $\times 10^{-10}$
$a_\mu^{had,LBL}$	光光散乱による項 (8.6 ± 3.5) $\times 10^{-10}$

の誤差はハドロニックな反応による不定性を、2番目の誤差はヒッグスの質量により制限されるボソンの交換による不定性を示す。また、 $a_\mu^{had,LO}$ において、一番目の (*exp*) は実験誤差、次の (*rad*) は e^+e^- のデータの中で radiative な反応する際 missing に対する補正による誤差、(*SU(2)*) はアイソスピンを破る事象に対する補正による誤差を示している。

式 2.17、表 2.4 の中にも示したように、ハドロン真空偏極項のうち、比較的低エネルギー領域での補正が e^+e^- のデータと τ のデータを使った時では違いが見られる。最終的な a_μ^{SM} においても、 τ のデータを用いた場合は計算値と実験値 0.9σ で一致しているのに対し、 e^+e^- のデータを使用した場合は 3.0σ の違いが見られる。このように、使用するデータが e^+e^- か、 τ かにより結果に違いが見られるため、実験値と理論値間の違いに加え、 e^+e^- データと τ データによる違いについても今後さらなる検討が必要とされている。

本解析では、 $\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊を用いて、新たな τ のデータを提供することを目的としている。これを用いて、ミューオンの異常磁気モーメントの理論値のさらに精密な予測と、現在見られる e^+e^- データと τ データ間の違いをさらに検討することが可能である。

第3章 Belle実験装置

KEKB 加速器は、CP 非保存を予言する小林益川理論を検証することを目的として建設された電子・陽電子衝突型加速器である。B 中間子反 B 中間子対を大量に生成するために、重心系のエネルギーは $\Upsilon(4s)$ 状態の 10.58 GeV に設定されている¹。

一般に加速器には、高いエネルギーを目指すものと、高いルミノシティを目指すものがある。KEKB 加速器は、大量の B 中間子反 B 中間子の生成を目的としているため高いルミノシティを実現するように設計されている。

KEKB 加速器は電子と陽電子のエネルギーが異なる非対称エネルギー、2 リング型の衝突型加速器になっており、これは B 中間子の崩壊点を精度よく測定するためである。

3.1 KEBB 加速器

B ファクトリーのような非対称エネルギー型の衝突型加速器では、電子と陽電子は異なったリング中に蓄積されなければならないため、2 リングが必要となる。実際の KEBB 加速器の全体図を図 3.1 に示す。KEKB では既存の周長 3km のトリスタンのトンネルの中に電子を蓄積する 8GeV のリングと、陽電子を蓄積する 3.5GeV のリングの 2 つリングを並べて設置されている。電子と陽電子は各々のリングの中を反対方向に周回する。2 つのリングは 2ヶ所で交差するが、そのうちの筑波実験棟中の 1ヶ所で電子と陽電子が衝突するようになっており、衝突点を囲んで Belle 測定器と呼ばれる大型の検出器が設計されている。

KEKB 加速器ではビーム輝度 (ルミノシティ) が最大となるように設計されている。ルミノシティ \mathcal{L} は、断面積 σ を持つ、反応の発生頻度 R が $R = \mathcal{L}\sigma$ となるように定義される。衝突型加速器において、ルミノシティはつぎのような式により与えられる。

$$\mathcal{L} = 2.2 \times 10^{34} \xi(1+r) \left(\frac{E \cdot I}{\beta_y^*} \right) / \text{cm}^2 / \text{s}$$

ここで、 E はビームのエネルギー (単位: GeV), I は蓄積電流 (単位: A) である。また、 ξ はビームチューンシフトと呼ばれる量であり、ほぼ 0.040 の値を持つ。 r は衝突点における垂直方向のビームサイズを水平方向のビームサイズで割った値であり、 β_y^* は衝突点で垂

¹ $\Upsilon(4s)$ は約 96%以上の確率で B 中間子反 B 中間子対に崩壊する

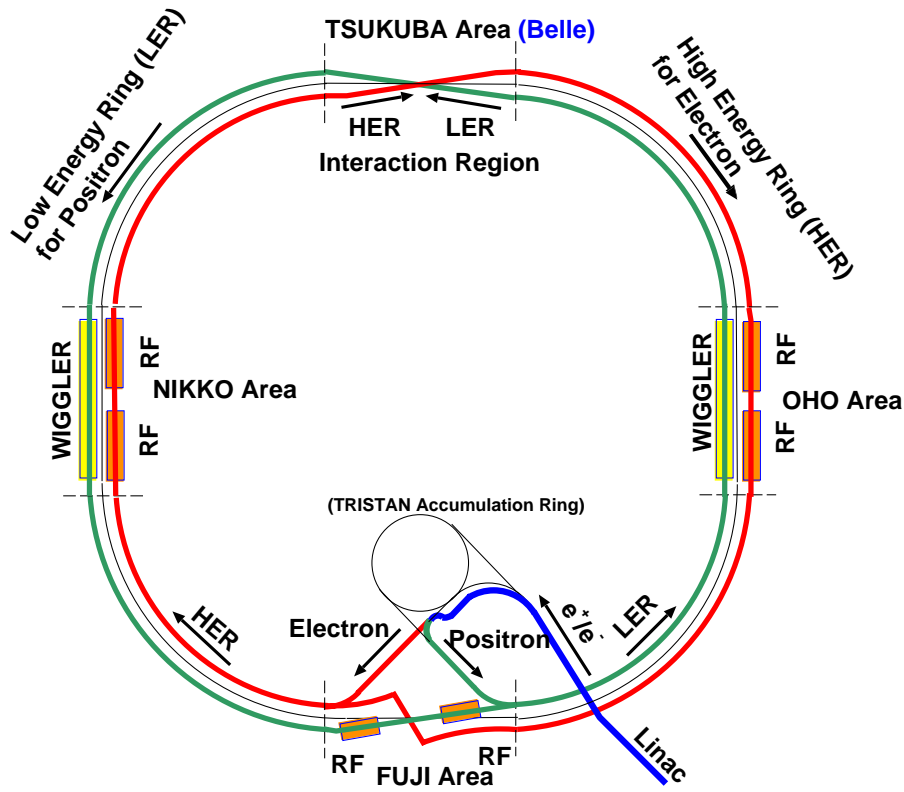


図 3.1: KEKB 加速器

表 3.1: KEKB 加速器のパラメーター

Ring	LER	HER	
ビームエネルギー (GeV)(e^+e^-)	3.5	8.0	GeV
周長 (m)	3016.26		m
ルミノシティ ($cm^{-2}s^{-1}$)	1×10^{34}		$cm^{-2}s^{-1}$
ビーム交差角 (mrad)	± 11		mrad
ビームビームチューンシフト	0.039/0.052		
Beta function at IP (β_x^*/β_y^*)	0.33/0.01		m
ビーム電流 (A) (e^+e^-)	2.6	1.1	A
ビームエネルギーの広がり (MeV)	7.1×10^{-4}	6.7×10^{-4}	
バンチ間隔	0.59		m
バンチの数	5000		

直方向 (y 方向) にどれだけビームを絞れるかを表すパラメーターである。結局、ルミノシティを大きくするためには、 ξ と蓄積電流を大きくし、 β_y^* を小さくすれば良い。KEKB では、表 3.1 にあるように、 $10^{34} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ のビームルミノシティをめざしている。この目標を達成するためには、電子リングで 1.1A、陽電子リングでは 2.6A の電流を蓄積することが必要である。

KEKB 加速器のルミノシティは順調に上昇しており、衝突型加速器の中では、現在最強を誇っている。図 3.2 にルミノシティの状態を示した。

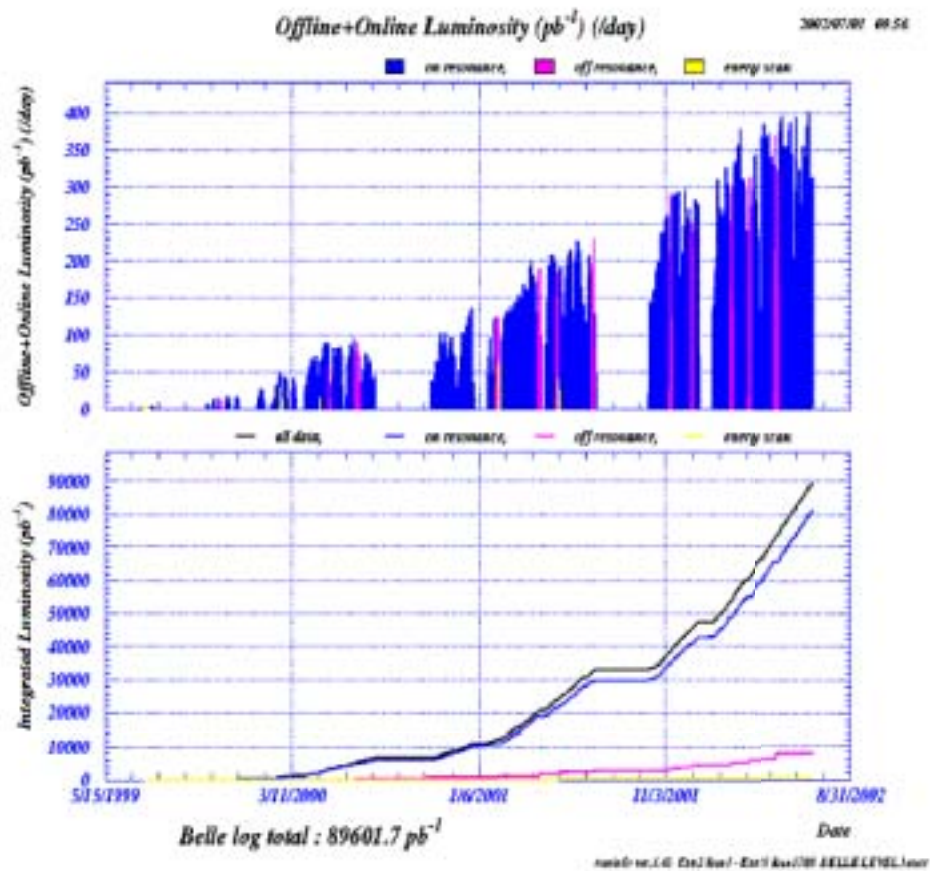


図 3.2: KEKB 加速器ルミノシティ

3.2 Belle 検出器

電子・陽電子の衝突で生成された B 中間子対が崩壊すると、荷電粒子と光子が平均 10 個ずつ放出される。Belle 測定器は、これらの粒子を高い効率で検出し、かつ粒子の崩壊点や粒子の種類を区別する能力を持つように設計された大型の測定器である。Belle 測定器の全体図を図 3.3、断面図を図 3.4 に示し、表 3.2 に Belle 測定器中にくみこまれている各測定器の性能の一覧を示す。

ここで、Belle 検出器の座標軸は、ビームの衝突点を原点とし、電子のビームの方向を z 方向、鉛直上向を y 軸、この 2 つから右手系になるように x 軸をとっている。また、 z 軸回りの回転角を ϕ 、 z 軸からの偏角を θ 、 z 軸からの距離を $r(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ とする。

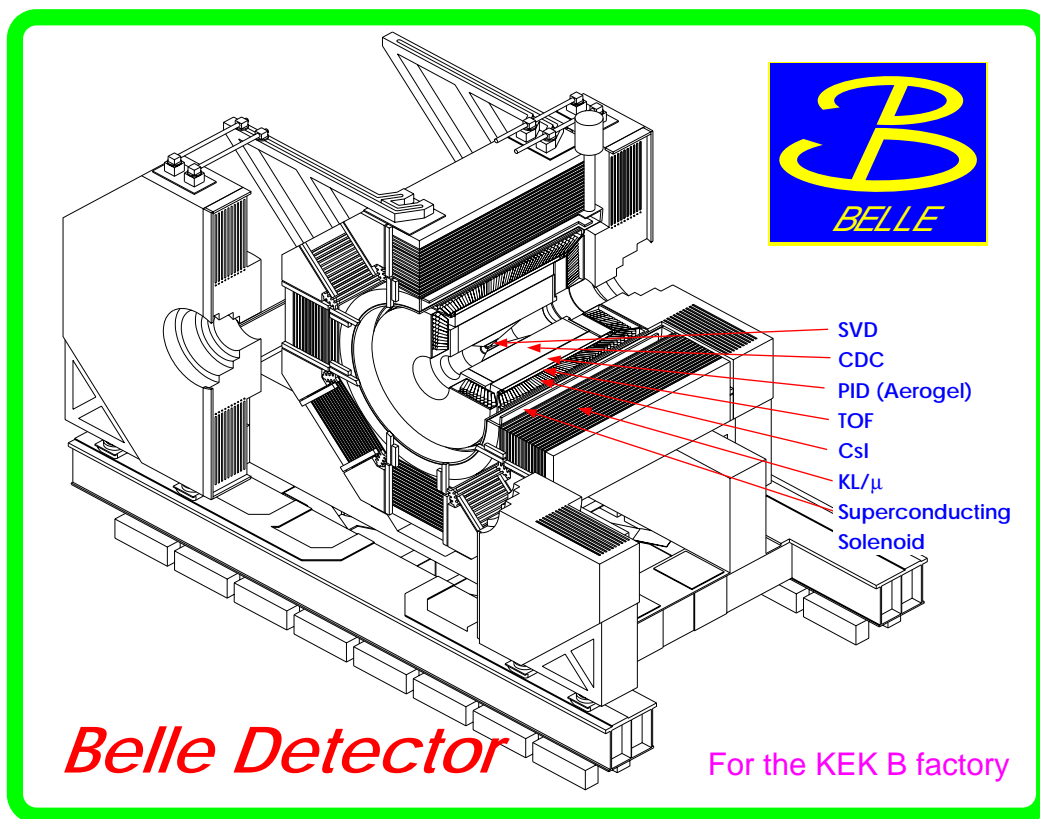


図 3.3: Belle 測定器

Detector	Type	Configuration	Readout	Performance
Beam pipe	Beryllium double-wall	Cylindrical, $r = 2.3$ cm 0.5 mm Be/ 2 mm He /0.5 mm Be		
SVD	Double sided Si strip	300 μm thick, 3 layers $r = 3.0 - 5.8$ cm Length = 22 - 34 cm	ϕ : 41k θ : 41k	$\sigma_{\Delta z} \sim 105 \mu\text{m}$
EFC	BGO	2 cm \times 1.5 cm \times 12 cm	θ : 5 ϕ : 32	
CDC	Small cell drift chamber	Anode : 52 layers Cathode : 3 layers $r = 8.5 - 90$ cm $-77 \leq z \leq 160$ cm	A: 8.4k C: 1.5k	$\sigma_{r\phi} = 130 \mu\text{m}$ $\sigma_z = 200 \sim 1,400 \mu\text{m}$ $\sigma_{p_t}/p_t = 0.3 \% \sqrt{p_t^2 + 1}$ $\sigma_{dE/dx} = 6 \%$
ACC	n : 1.01 \sim 1.03 Silica Aerogel	$\sim 12 \times 12 \times 12 \text{ cm}^3$ blocks 960 barrel / 228 endcap FM - PMT readout	1,788 ch	$\mu_{eff} = \geq 6$ K/π 1.2 $\leq p \leq 3.5$ GeV/c
TOF	Plastic Scintillator	128 ϕ segmentation $r = 120$ cm, 3 m long	128 \times 2 ch	$\sigma_t = 100$ ps $K/\pi = \text{up to } 1.2$ GeV/c
ECL	CsI	Tower structure $\sim 5.5 \times 5.5 \times 30 \text{ cm}^3$ crystals Barrel : $r = 125 - 162$ cm Endcap : $z = -102$ and $+196$ cm	6,624(B) 1,152(FE) 960(BE)	σ_E/E $= \frac{0.066(\%)}{E} \oplus \frac{0.81(\%)}{E^{1/4}} \oplus 1.34(\%)$ $\sigma_{pos} = 0.5 \text{ cm} / \sqrt{E}$ E in GeV
MAGNET	super conducting	inn.rad. = 170 cm		B = 1.5 T
KLM	Resistive plate counter	14 layers (5 cm Fe + 4 cm gap) 2 RPCs in each gap θ and ϕ strips	θ : 16k ϕ : 16k	$\Delta\phi = \Delta\theta = 30$ mrad for K_L $\sigma_t = 1$ ns 1 % hadron fakes

表 3.2: Belle 検出器のパラメータ

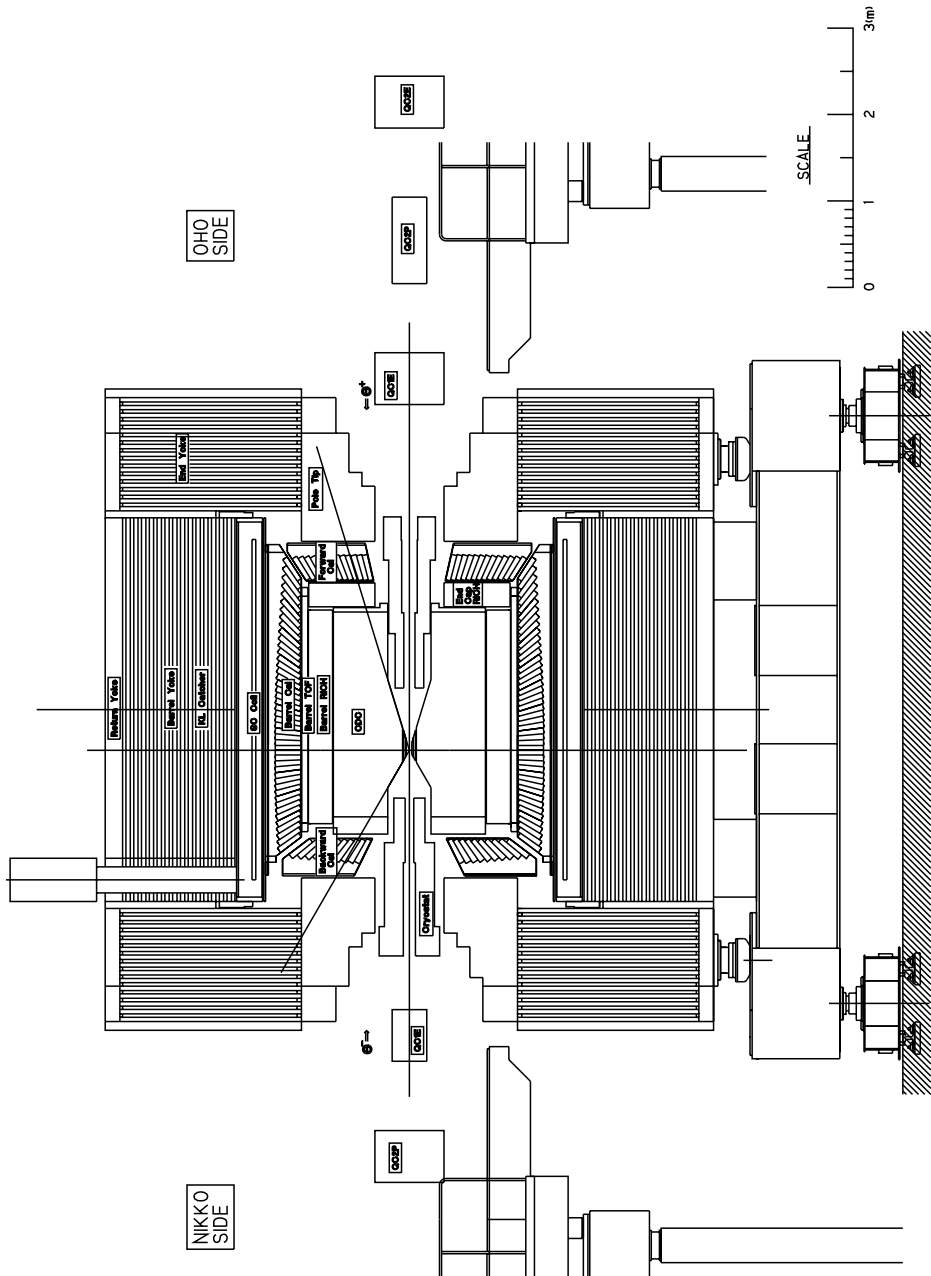


図 3.4: Belle 測定器の構造

3.2.1 粒子崩壊点測定器 (SVD; Silicon Vertex Detector)

シリコン・バーテクス・ディテクター (SVD) は、最もビーム衝突点の近くにおかれた測定器で、短い寿命 ($10^{-10} \sim 10^{-13} \text{sec}$) をもつ粒子の崩壊点を測定するための測定器である。粒子の崩壊点の測定は B 中間子のみでなく、D 中間子や τ レプトンの物理の研究を行う上でも非常に重要である。本測定器は、崩壊点の z 方向の分解能 $\sigma_z \sim 100 \mu\text{m}$ を達成している。SVD はその外側に位置する中央飛跡検出器 (CDC) と共に粒子の飛跡を検出し、運動量を精度良く測定する役割を担っている。

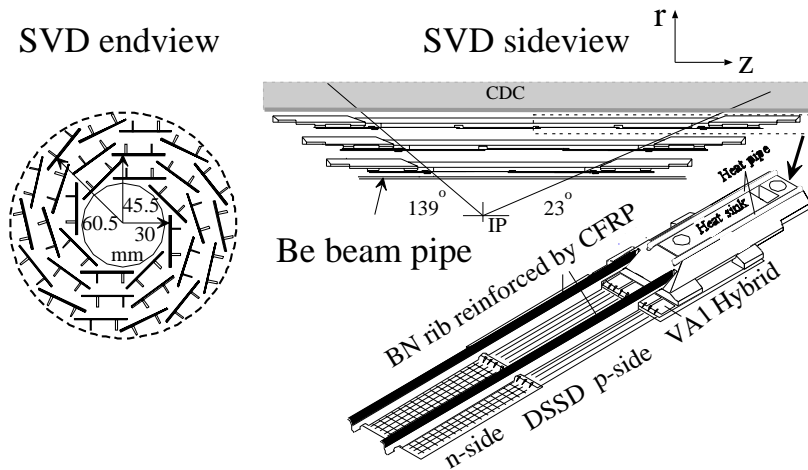


図 3.5: SVD の構造

図 3.5 は SVD の側面図と断面図である。バレル部分は 3 層になっておりビーム軸との角度が $23^\circ < \theta < 139^\circ$ の範囲を覆っている。また各々の層の半径は、内側から 30mm, 45.5mm, 60.5mm になっており、独立なラダーから成る。各々のラダーにはシリコンストリップ検出器 (DSSD) があり、内側の層から 8, 10, 14 枚でビームパイプを取り囲んでいる。シリコンストリップ検出器 (DSSD) とは厚さ $300 \mu\text{m}$ のシリコン板に幅 $6 \mu\text{m}$ の電極を $25 \mu\text{m}$ 間隔に張付けたものであり、この上下面の電極に逆バイアスの電圧をかけることによって、電極間を荷電粒子が通過する際に生じる電子ホール対を各電極に集め、信号として読み出す。

3.2.2 中央飛跡検出器 (CDC; Central Drift Chamber)

荷電粒子の飛跡や運動量の正確な測定が、中央飛跡検出器 (CDC) の重要な役割である。ソレノイドが作る 1.5T の磁場中で荷電粒子は、螺旋した飛跡を描き、飛跡の長さ (xy 平面での半径 \updownarrow) を検出することで荷電粒子の横方向運動量 (p_t) を以下の式で求めることができる。

$$p_t[\text{GeV}/c] = 0.3B_{[T]}\uparrow_{[m]}$$

ここで、 \uparrow は螺旋の半径である。また z 方向の運動量は螺旋のピッチから与えられる。また CDC では、荷電粒子のエネルギー損失 (dE/dx) を測定することにより、荷電粒子の種類を識別する能力を備えている。図 3.6 に CDC で測定された、エネルギー損失を荷電粒子の運動量の関数として示す。エネルギー損失は粒子の種類に依存せず速さ ($\beta = v/c$) で決まる。異なる種類の粒子は最小のエネルギー損失となる運動量が違うため、異なる曲線を与える。横方向の運動量分解能は $\frac{\sigma_{p_t}}{p_t} = 0.3\% \sqrt{p_t^2 + 1}$ (p_t の単位は GeV)、 dE/dx の分解能は $\frac{\sigma}{dE/dx} = 6\%$ を達成している。これを用いて、検出した荷電粒子がどの曲線に近いかにより、その粒子の識別が可能である。

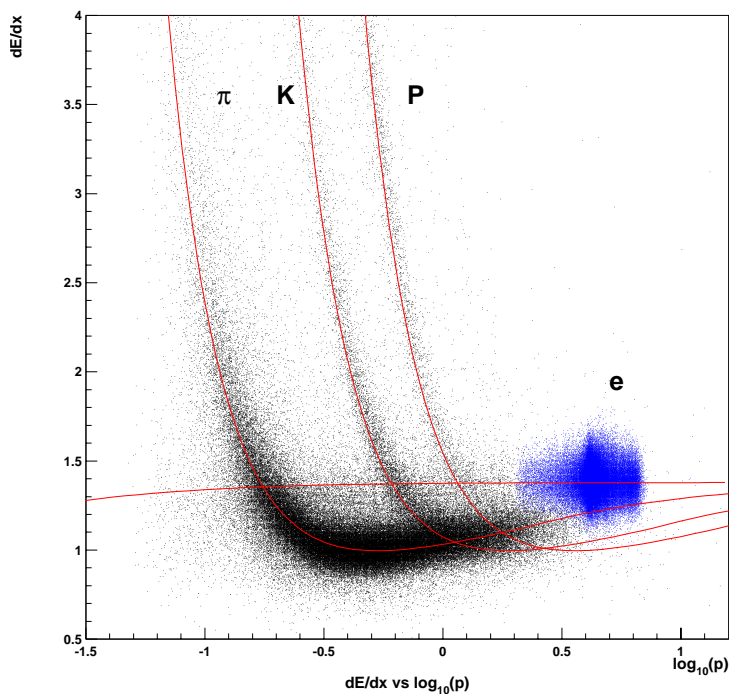


図 3.6: エネルギー損失。荷電粒子の種類ごとのエネルギー損失を運動量の関数として示した図。

CDC の構造は、図 3.7 にあるように、外径が約 88cm、長さ約 235cm の円筒形で、衝突点に対して $17^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ の領域をカバーしている。Z 方向に非対称になっているのは、ビームのエネルギーが電子と陽電子とで異なっていることを考慮しているためである。また前方や後方など半径 r の小さいところ²では、運動量の小さな粒子に対するアクセプタンスをより大きくするために円錐形になっている。内部は 3 層のカソードワイヤーと 50 層

²半径 r が 30cm よりも小さいような領域。

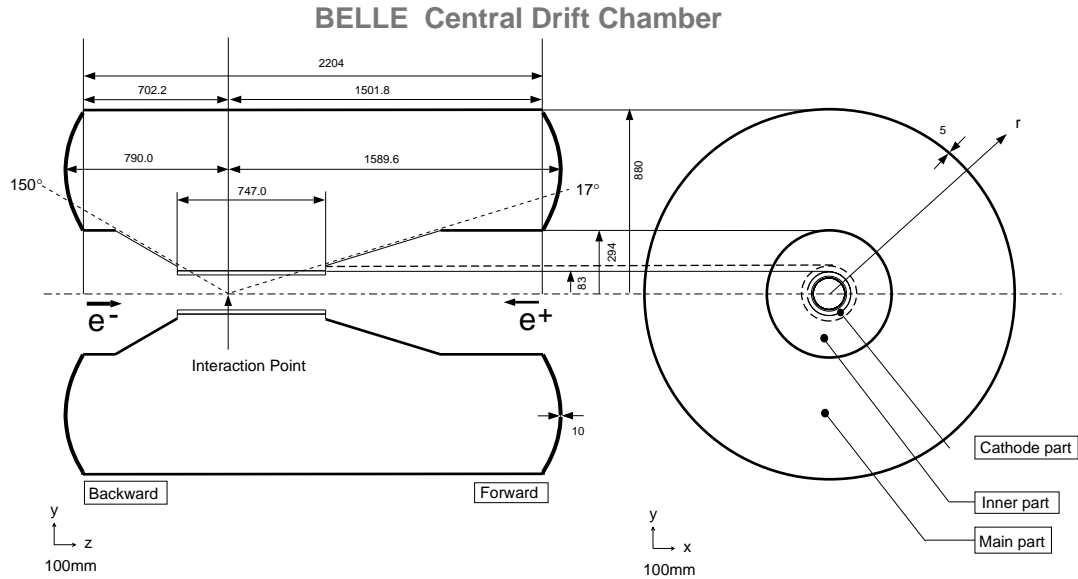


図 3.7: CDC の構造

のアノードワイヤーで構成され、後者は陽電子ビーム軸に平行に張られたアクシャルワイヤーと、 Z 方向の位置測定能力を上げるためにビーム軸に対して約 50_{mrad} の角度をつけて張られたステレオワイヤーとの 2 種類から成る。各々のドリフトセルはほぼ正方形の形をしており、内側の 3 セルを除けばドリフトする最大の距離は $8_{mm} \sim 10_{mm}$ で半径幅は $15.5_{mm} \sim 17_{mm}$ である。読み出しはアノードワイヤーとカソードストリップで行われる。

3.2.3 エアロジェルチェレンコフカウンター (ACC; Aerogel Čerenkov Counter)

エアロジェル・チェレンコフカウンター (ACC) の役割は K^\pm と π^\pm とを識別することである。荷電粒子が ACC を通過するとその粒子速度 v と光速の比 $\frac{v}{c}$ がエアロジェルの屈折率 n に対して、

$$\frac{v}{c} > \frac{1}{n}$$

の時、チェレンコフ光を出す。図 3.8 に示すように、異なった屈折率のエアロジェルを用いることにより、 $1.2 \sim 3.5_{GeV}/c$ の領域で K^\pm と π^\pm を識別することができるよう設計されている。この運動量領域で荷電粒子が π^\pm であれば、チェレンコフ光を出し、 K であればチェレンコフ光を出さない構成になっている。

図 3.8 のように ACC は Belle 検出器の中央部分に位置する。ACC のバレル部分には ϕ 方

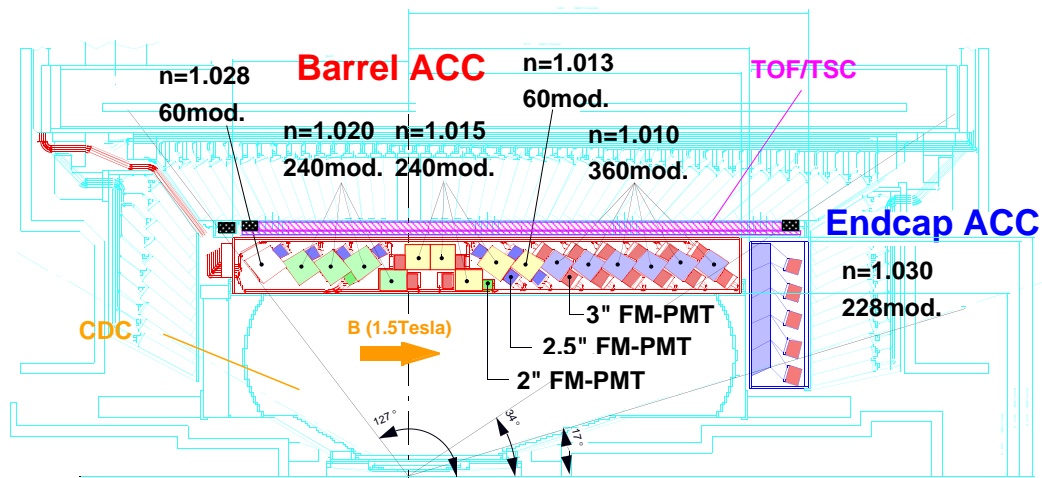


図 3.8: ACC の構造

向に 60 セルにわけられた 960 個のカウンターモジュールがあり、エンドキャップ部分は同心の 5 層に配列された 228 個のカウンターモジュールがある。すべてのカウンターは衝突点の方向を向いた状態で配列されている。

π^\pm と K^\pm をより良く識別するために、エアロジェルの屈折率は、1.01 ~ 1.03 の間を選ぶ。カバーしている領域は $17^\circ < \theta < 127.2^\circ$ である。ACC カウンターモジュールを、図

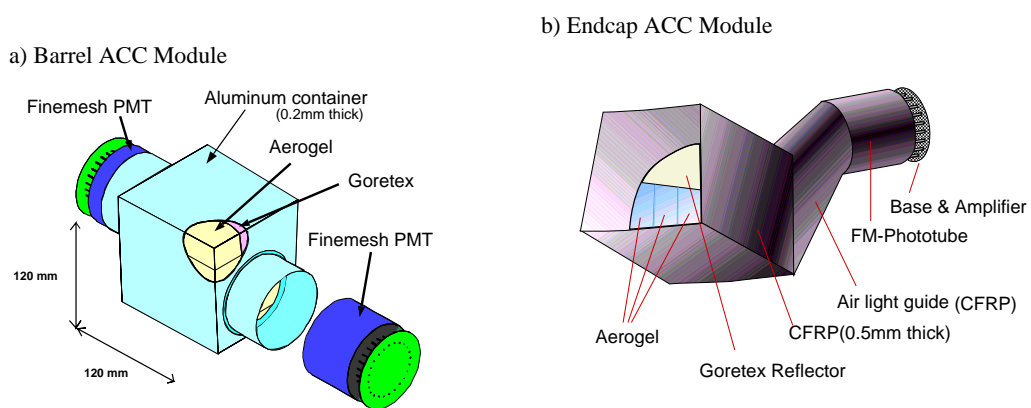


図 3.9: ACC カウンターモジュールの構造

3.9の(a)(b)に示す。各々バレル部分とエンドキャップ部分に使われている。5枚のエアロジェルのタイルが厚さ0.2mmのうすいアルミニウム製の一辺12cmの立方体の箱の中に積み重ねられている。チェレンコフ光を検出するために、1,2個の光電子増倍管(ファインメッシュ型,FM-PMT)が取り付けられている。

3.2.4 飛行時間測定器 (TOF; Time of Flight)

飛行時間測定器 (TOF) は、プラスチックシンチレーションカウンターを使用した検出器で、荷電粒子の飛行時間を使って、粒子識別を行うための検出器である。本検出器は時間の測定精度が100psecを達成しており、これによって運動量1.2GeVを持つ粒子まで識別が可能である。これは、 $\Upsilon(4s)$ で生成された粒子の90%に相当する。

100psの時間精度を実現するために、シンチレーション発光の立ち上がりの速いシンチレーターを使用した。カウンター内を伝達するシンチレーション光の時間的分散を最小にするためにlight-guidesは使用されていない。また光子収集を最大にするために、感度が広域のフォトカソードを持つ光電子増倍管を使用している。TOFシステムは128個のTOFカウンターと64個のTSCカウンターから成る。台形の形をした長さ1.2mのTOFカウンター2個と、TSCカウンター1個でモジュール1個を作り、衝突点から1.2m($r=1.2m$)の位置にある64個のモジュールで衝突点に対して、 $34^\circ < \theta < 120^\circ$ の領域がカバーされている。

3.2.5 電磁カロリメータ (ECL; Electromagnetic Calorimeter)

電子や光子は物質にあると電磁シャワーを作り、エネルギーを失う。この全エネルギー損失を測定することで、電子や光子のエネルギーを非常に良い精度で測定するのが電磁カロリメータ (ECL) の役割である。

Belle実験において電子の識別は、CDCで測定された荷電粒子の運動量とECLで測定されたエネルギーデポジットとの比(E/P)により行うことができる。荷電粒子が電子の場合は、この比が1であるのに対し、荷電 π 中間子などのハドロンがECLに入射した場合エネルギーの一部を失うため、 E/P が1よりずっと小さくなる。これを利用し、電子とハドロン(π, K)との識別が可能である。

上記の要求を満たすために、BelleではCsI(Tl)結晶を電磁カロリメータとして用いている。シンチレーション光の読み出しには、磁場中で問題なく使えるシリコンフォトダイオード2枚を用いている。1個のCsI(Tl)カウンターのサイズは前面が $5.5cm \times 5.5cm$ で長さが30cmである(図3.10)。ECLはこのCsIカウンターが8736個使われている。その断面図を図3.11に示す。バレル部分は内径が1.25mで長さ3mである。前方と後方のエンドキャップは衝突点からZ方向に+2.0mと-1.0mの位置にある。前方エンドキャップは

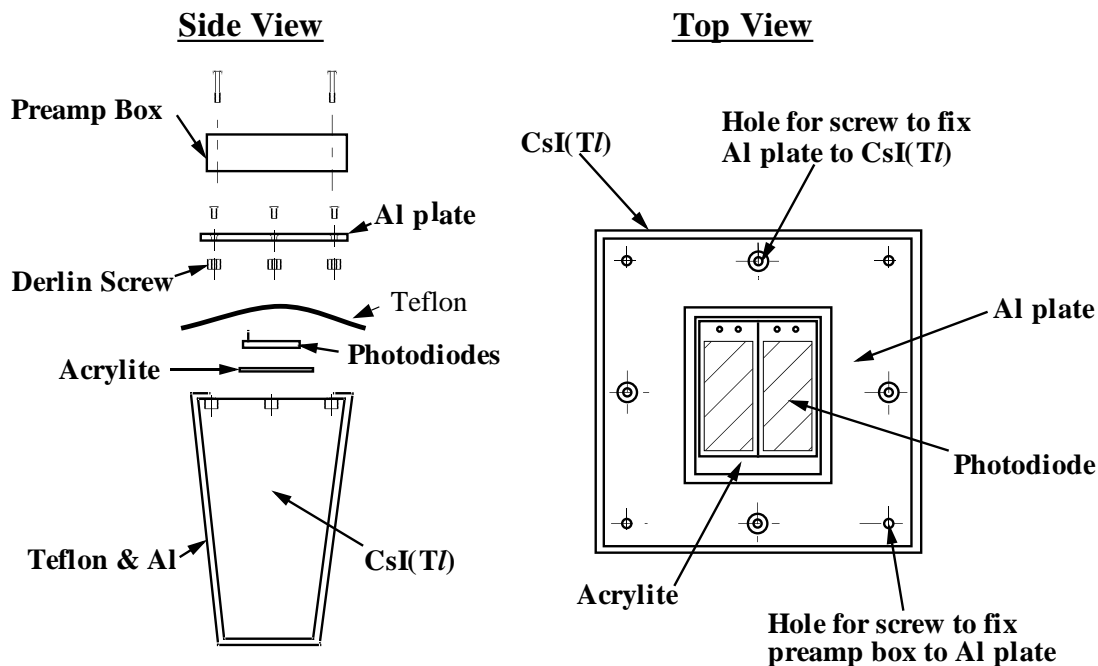


図 3.10: CsI(Tl) カウンター

12.4° ~ 31.4°、バレルは 32.2° ~ 128.7°、後方エンドキャップは 130.7° ~ 157.1° の領域を各々カバーしている。

光子が ECL に入射した場合、その信号は 1 個の CsI カウンターに収まらず、周りの CsI カウンターまでおよぶ。直接光子が入射したカウンターは、周りのカウンターに比べ高いエネルギーを検出しているカウンターと定義し、そのカウンターを中心にカウンター 5 個 × 5 個 (図 3.12) 領域内の 25 個のカウンターのエネルギーの和をそのシャワーのエネルギーとしている。達成されたエネルギー分解能は

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{0.066\%}{E} \oplus \frac{0.81\%}{E^{\frac{1}{4}}} \oplus 1.34\% , \quad E \text{ の単位は } GeV$$

で与えられる。 π^0 はほぼ 100%で $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ に崩壊する。特に高い運動量をもつ π^0 の検出は、2 つの γ のなす角度が小さいため、2 つの光子のシャワー領域が重なってしまう。そのため、1 つの光子としてエネルギーを測定してしまう。従って Belle 測定器では、高い運動量の π^0 から出た 2 光子の分離を CsI カウンターの表面を $5.5\text{cm} \times 5.5\text{cm}$ とシャワーの広がりより小さくすることで可能にしている。

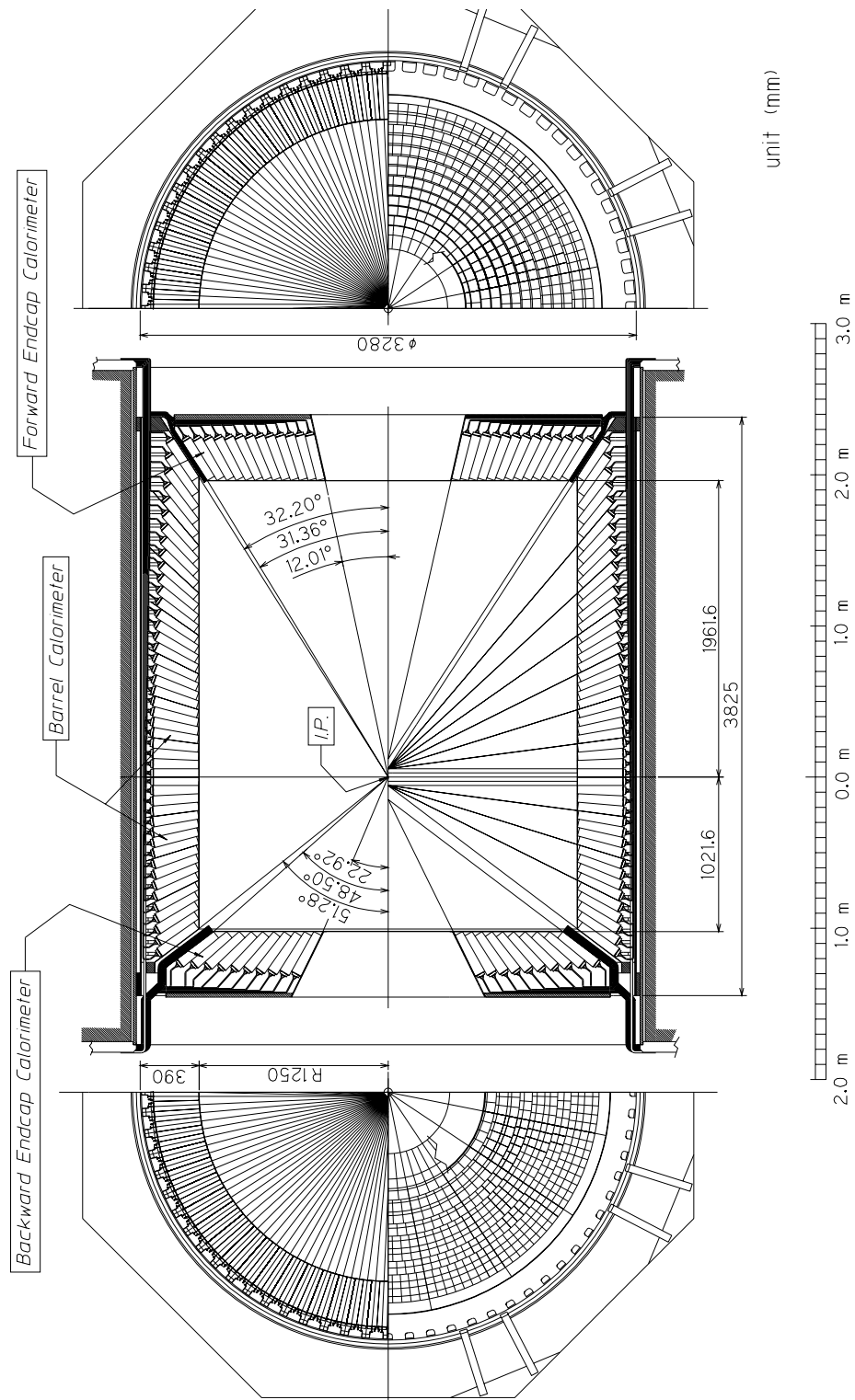


図 3.11: ECL の断面図

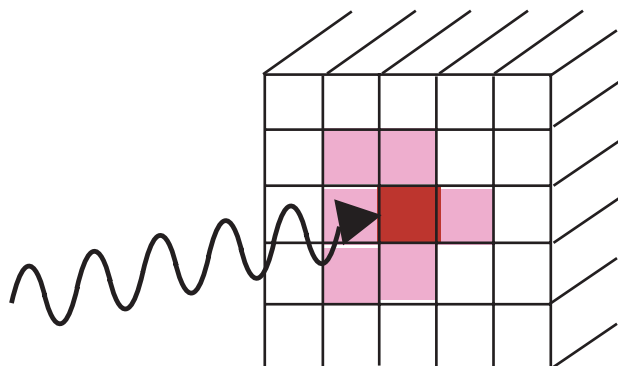


図 3.12: シャワーの再構成

3.2.6 K_L, μ 粒子検出器 (KLM)

Belle 測定器の最も外側に位置する K_L, μ 粒子検出器 (KLM) は $600\text{MeV}/c$ 以上の広い運動量領域での、 K_L 及び μ 粒子の識別を役割としている。KLM 検出器は、高抵抗平行板チェンバーと厚さ 4.7cm の鉄を 11 層重ねた構造をもっている。

μ 粒子は貫通力が優れているため鉄を突き抜け、多くの RPC の層にクリーンな信号を残す。よって、CDC で測定した飛跡と KLM のヒットを関連づけることにより、 μ 粒子の同定が可能である。一方で K_L は鉄と衝突し反応 (強い相互作用) を起こす。CDC に飛跡を残さず、KLM 内で残したシャワー信号は K_L によるものである。

3.2.7 Belle トリガーシステム

トリガーとは研究対象である物理事象を効率よく識別し、バックグラウンド事象を除き、収集すべき反応事象頻度を限られたデータ収集システム容量内に収めることを目的としている。目標としている $10^{34}_{\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}}$ のルミノシティにおける各事象の断面積と Belle 実験で使用しているトリガーによるトリガー頻度を表 3.3 に示す。実際にはこの表にあげた物理事象の他にビームと真空パイプ中の残存ガスとの衝突点や宇宙線からのバックグラウンドが多くあり、それらを除いてこのような反応頻度におさえるのがトリガーの役割である。

Belle トリガーシステムを図 3.13 に示す。各検出器にはサブトリガーシステムがあり、CDC は飛跡トリガー、ECL はエネルギートリガー、KLM は μ 粒子トリガーを各々行い、TOF がトリガーのタイミングを行う。これらの情報をまとめ、GDL (Global Decision Logic) が収集すべき事象と判断するとトリガーのゲート³が出される。

³最終的なトリガー。これをうけて、測定器のサブシステムごとに信号の数値化がスタートする。

物理事象過程	断面積 (nb)	反応頻度 (Hz)
$\Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$	1.15	11.5
Hadron production from continuum	2.8	28.
$\mu^+\mu^- + \tau^+\tau^-$	1.6	16.
Bhabha ($\theta_{lab} \geq 17^\circ$)	44.	4.4 ^(a)
$\gamma\gamma$ ($\theta_{lab} \geq 17^\circ$)	2.4	0.24 ^(a)
2 γ processes ($\theta_{lab} \geq 17^\circ, p_t \geq 0.1$ GeV)	~ 15	~ 35
Total	~ 67	~ 96

表 3.3: $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ のルミノシティにおける各事象の断面積とトリガー頻度。Bhabha 散乱と光子対生成の事象は反応断面積が大きいので、トリガー頻度は 1/100 倍している

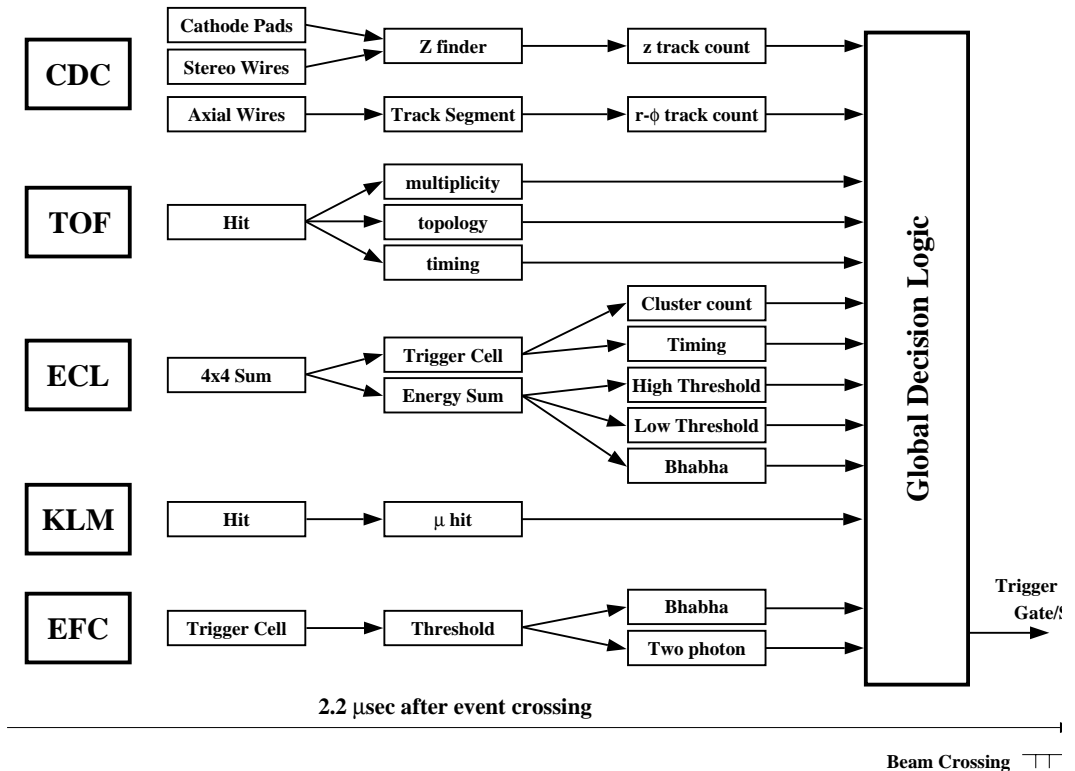


図 3.13: Belle トリガーシステム

3.2.8 データ収集システム (DAQ)

Belle 実験のデータ収集システムを図 3.14 に示す。各検出器のデジタル信号はイベントビルダーに送られ、位置事象分のデータにまとめられる。その後、オンラインコンピューターファームで事象生成が行われる。ここで、バックグラウンド事象を減らしてから、オフラインコンピューターシステムに転送られ、蓄積される。

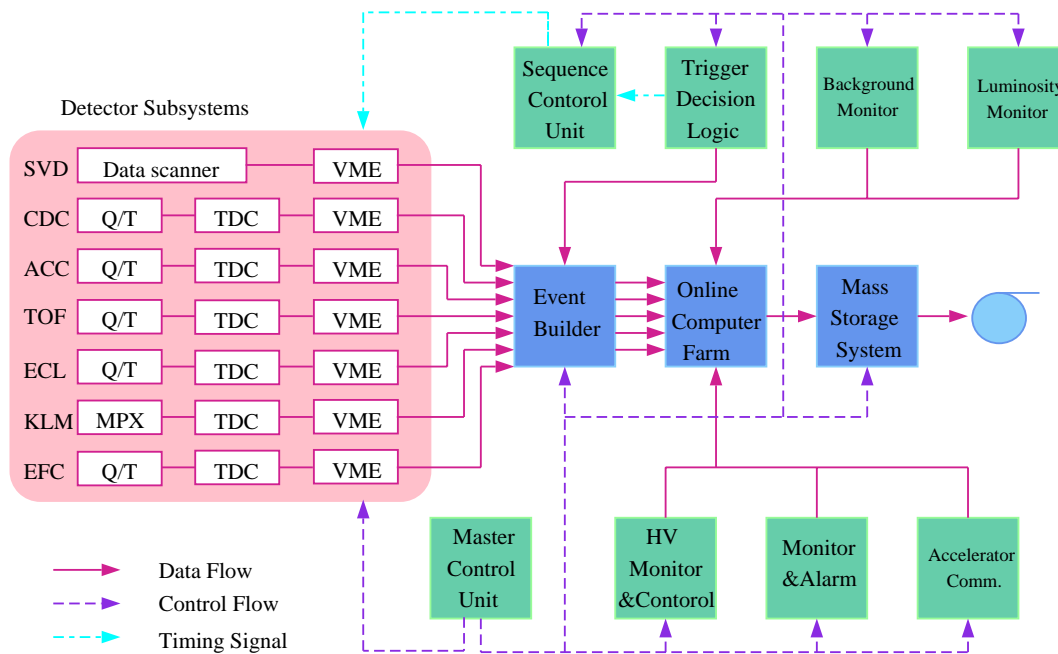


図 3.14: DAQ システム。データ収集システム。

第4章 事象選別

この章では、Belle 実験が収集した膨大なデータの中から、本解析に用いた $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選び出す手法とその結果について報告する。事象選別の流れを図 4.1 に示した。この章では、以下、この流れにのっとりして事象選別を進め、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 候補を選別する。

4.1 解析に用いたデータ

本解析で用いた実験データは、KEK にある e^+e^- 衝突型加速器 (KEKB 加速器) と、その衝突点におかれた Belle 検出器を用いて収集されたものである。(KEKB 加速器については 3.1 節で、Belle 検出器については 3.3 節で詳しく述べた)

本解析で用いたのは、Belle 実験において 2000 年 12 月までに収集されたデータ¹であり、そのデータ量は積分ルミノシティにして $4.44/fb$ である。これは、 τ -pair 事象にして約 4.0×10^6 event に相当する。

また、実験データに含まれるバックグラウンドの見積もりや、実験のアクセプタンスを求めるために擬似事象生成プログラム (モンテカルロシミュレーション) を用いた。そのために用いたプログラムの名称を表 4.1 に示す。 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象生成には TAUOLA プログラム、 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma)$ 、 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma)$ には、BHLUMI, KKMC を用いた。本解析で用いたモンテカルロシミュレーションプログラムについては、表 4.1 にまとめて示した。これらには、高次の光子放出過程の効果まで含まれている。用いたモンテカルロシミュレーションの量は実験データの量に対して 2.54 倍ぐらいである。シミュレーションの量を多くすることで、「シミュレーションからくる統計誤差を小さくできる」、「response matrix を正確に決定できることからデータを unfolding する際の系統誤差を小さくできる」といった利点を得ることができる。

4.2 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象選別

まず、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選ぶ前段階として、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象 (以後、 τ -pair 事象、または $\tau^+\tau^-$ 事象と呼ぶ) の選別を行う。これは事象選別の流れ図 4.1 においては、「 τ -pair

¹2000 年 10 月から 2000 年 12 月までに収集された実験番号 9 のデータ

実験データ

モンテカルロシミュレーション

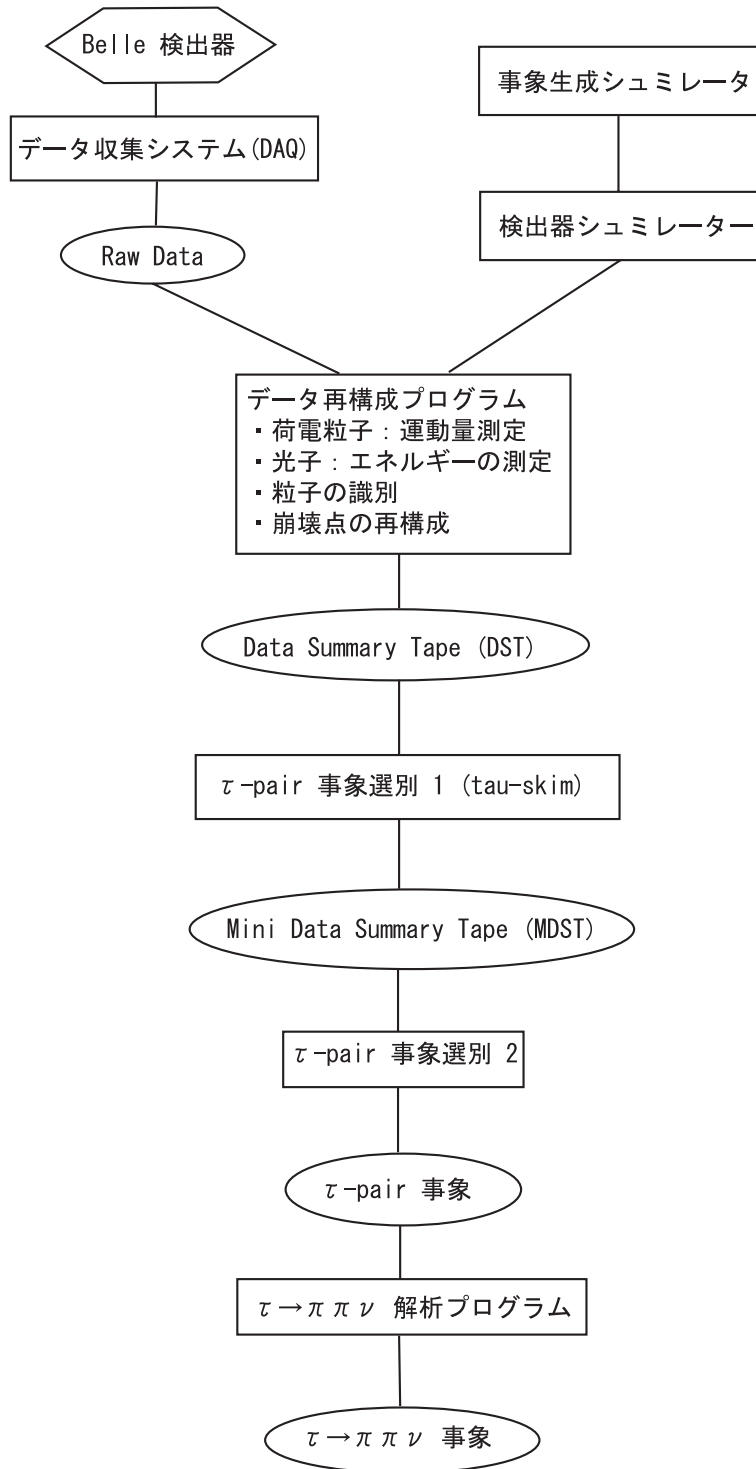


図 4.1: $\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu$ 事象選別の流れ

表 4.1: シミュレーション使用プログラム

	シミュレーションの崩壊モード	生成断面積	使用したプログラム	参照
signal	$ee \rightarrow \tau\tau(\tau\tau)$	0.91nb	KORALB/TAUOLA	[26]
B.G.	$ee \rightarrow ee\mu\mu$	18.9 nb	AAFHB	[33]
	$ee \rightarrow eeee$	40.9 nb	AAFHB	[33]
	$ee \rightarrow eeuu/dd$	12.50 nb	AAFHB	[33]
	$ee \rightarrow eess$	0.227 nb	AAFHB	[33]
	$ee \rightarrow eecc$	0.03 nb	AAFHB	[33]
	$ee \rightarrow bhabha$	100.2 nb	BHLUMI	[31]
	$ee \rightarrow \mu\mu\gamma$	1 nb	KKMC	[32]
	$ee \rightarrow q\bar{q}(q = u, d, s)$	2.09 nb	QQ	[30]
	$ee \rightarrow c\bar{c}$	1.30 nb	QQ	[30]
	$ee \rightarrow B^+B^-$	0.525 nb	QQ	[30]
	$ee \rightarrow B^0B^0$	0.525 nb	QQ	[30]

事象選別 1(tau-skim)」「 τ -pair 事象選別 2」に対応する。

$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象の特徴としては、

- 荷電飛跡の数が少ないこと
- 反応の中で出てくるニュートリノ (ν_τ) が検出されないため運動量やエネルギーに不足分 (missing) がある。このため τ 粒子の崩壊事象においてはこれを運動学的に直接識別することはできない。(よって、「 τ -pair 事象らしきものから いかにかバックグラウンドを減らすことができるか」が重要になる。)

が挙げられる。

様々な τ 粒子の崩壊の中で、荷電粒子 (荷電飛跡) を 1 本含むモードで崩壊するものは全体の 85%、荷電飛跡が 3 本含まれるような崩壊は 15% である。よって、 $\tau^+\tau^-$ 事象で考えると

- $\tau^+\tau^-$ のいずれも荷電飛跡 1 本を含む崩壊 (荷電飛跡 計 2 本) : 72%
- $\tau^+\tau^-$ のうち一方が荷電飛跡を 1 本、もう一方が 3 本含む崩壊 (荷電飛跡 計 4 本) : 13%

となる。つまり、荷電飛跡が 2 本から 4 本ある事象を選べば、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象のうち大部分 (85%) を選ぶことができる。

また、上にも書いたように τ 粒子の事象においては ν_τ が検出されないため運動量やエネルギーに不足分がある。このため運動学的に直接事象を識別することはできない。しか

しながら、これは τ 崩壊の大きな特徴であり他の反応と区別し、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 反応以外のバックグラウンドを減らす際に重要なものである。

実験データに含まれる $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象以外のバックグラウンドには以下のようなものがある。

$$\text{バックグラウンド} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Bhabha 散乱} & e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma) \\ \text{ミュー粒子対生成} & e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-(\gamma) \\ \text{ハドロン対生成 (continuum)} & e^+e^- \rightarrow q\bar{q}(\gamma) \\ \text{2光子生成反応} & \left\{ \begin{array}{l} e^+e^- \rightarrow (e^+)(e^-)\mu^+\mu^- \\ e^+e^- \rightarrow (e^+)(e^-)e^+e^- \\ e^+e^- \rightarrow (e^+)(e^-)\tau^+\tau^- \\ e^+e^- \rightarrow (e^+)(e^-)q^+q^- \rightarrow (e^+)(e^-) \text{Hadron} \end{array} \right. \\ \text{ビームガス反応} \\ \text{宇宙線} \end{array} \right.$$

これらの反応の反応断面積は表 4.1 のようになっている。

ここで「荷電飛跡」と「光子 (カロリメーターで観測されるもの)」に対しては、次のような条件を要求し、以下の解析ではこの条件を満たすものをそれぞれ「荷電飛跡」「光子」とした。

* 荷電飛跡

- ・ 荷電飛跡を衝突点へのばしたとき、ビーム軸と荷電飛跡の作る x-y 平面上での距離 dr が $\pm 1.0\text{cm}$ の範囲にあり ($|dr| < 1.0\text{cm}$)、かつ、z 方向への距離 dz が $\pm 5\text{cm}$ の範囲内にあること ($|dz| < 5.0\text{cm}$)。
- ・ 横方向の運動量 P_t が 0.1GeV 以上であること。 ($P_t \geq 0.1\text{GeV}$)

* カロリメーターで観測された光子

- ・ カロリメーターで観測されたクラスターが荷電粒子からのものでないこと。(これはカロリメーターのクラスターが CDC で検出された飛跡の外挿と一致するかしないかで判断している。)
- ・ 光子のエネルギーが 50MeV 以上であること。

4.2.1 τ -pair 事象選別 1 (tau skim)

まず、 τ -pair 事象を選ぶ第一段階として非常に緩い条件で $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ らしい事象を選別した。ここで、要求した条件は以下の通りである。

1. 荷電飛跡の本数が $2 \sim 8$ であること。 ($2 \leq N_{\text{track}} \leq 8$)

2. 運動量の絶対値の和 $\sum |P|$ が 9.0GeV 以下で、カロリメーターで観測された重心系におけるクラスタのエネルギーの和 $\sum |E|$ が 9.0GeV 以下であること。 ($\sum |P| \leq 9.0\text{GeV}/c$, $\sum |E| \leq 9.0\text{GeV}$)
これは、クリーンな Bhabha 散乱やミュオン粒子対生成事象を除くための条件である。
3. 少なくとも 1 本の荷電飛跡の横方向の運動量 P_t が 0.5GeV 以上であること。 ($P_t \geq 0.5\text{GeV}$)
これは、その事象に対して、トリガーが確実にかかっていることを保証するための条件である。

以上のような条件を課しても、

- ・ radiative Bhabha 散乱 ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$)²
- ・ ハドロン事象 ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$)
- ・ 2 光子生成反応 ($e^+e^- \rightarrow (e^+)(e^-)\mu^+\mu^-$ 等)

がバックグラウンドとして残っているので、これらを除く必要がある。次の小節 4.2.2 では、これらのバックグラウンドの除去を行う。

4.2.2 τ -pair 事象選別 2

前節で課した条件に加え、さらに以下のような条件を要求して、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象を選ぶ。小節 4.2.1 では除去しきれなかったバックグラウンドを除く条件もここで要求する。ここで用いた条件は、昨年 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比を測定する際にも用いられたものである [35]。

ここで、図 4.8 のように、事象を e^+e^- の重心系で 2 つの半球に分けた。この際、荷電飛跡の中で「他の荷電飛跡と 90° 以上離れており、その中で、最も運動量の高いもの」を「事象軸」と定義し、「事象軸に垂直な面」で事象を 2 つの半球に分けた。これを用いて、事象選別を進める。

- (1) τ -pair 事象の選別条件
 - (a) 荷電飛跡の本数が $2 \sim 4$ 本であること ($2 \leq N_{track} \leq 4$)。
 - (b) 事象全体の電荷の和 ΔQ がゼロであること ($|\Delta Q| = 0$)。
 - (c) 荷電飛跡から再構成された事象生成点 (event vertex) が

$$\begin{cases} \text{x-y 平面でのビーム軸からの距離が } 2.5\text{cm より小さい } (|V_z| < 2.5\text{cm}) \\ \text{x-y 平面での } z \text{ の位置が } 0.5\text{cm より小さい } (|V_r| < 0.5\text{cm}) \end{cases}$$

²これらの事象において 1 つあるいは 2 つの光子が検出できなかった場合

という条件を課す。

この条件でビームガスによるバックグラウンドや宇宙線の事象をほとんど除くことができる。

(d) 事象軸の方向が、 e^+e^- の重心系で 35 度～145 度であること。 $(35^\circ < \theta_{event}^* < 145^\circ)$

(2) バックグラウンドを除去するための条件

(a) Bhabha 散乱・2 光子生成反応を除く

i. Missing Mass(MM)³と Missing Angle($\theta_{missing}^*$)⁴の 2 次元 plot に対する条件

MM は、

$$MM^2 = (p_{initial}^{beam} - \sum p_{final}^{tracks} - p_{final}^\gamma)^2 \quad (4.1)$$

で与えられる⁵。

ここで、 $p_{initial}^{beam}$ は e^+e^- 系におけるビームの 4 元運動量、 $\sum p_{final}^{tracks}$ は終状態で観測された荷電飛跡の 4 元運動量、 p_{final}^γ は同じく光子の 4 元運動量である (図 4.2 を参照)。MM と $\theta_{missing}^*$ の 2 次元 plot を図 4.3 に示す。図 4.3-(3) より、radiative Bhabha 事象やミュオン粒子対生成事象は、MM がゼロの辺りに集中し、⁶ また、図 4.3-(4) より、2 光子生成反応は MM の比較的高い領域に集中して分布することがわかる⁷。これらのモンテカルロによる分布とデータの分布を比較することで、図の赤の八角形の中にあることを要求した。

ii. 荷電飛跡がカロリメーターの barrel 部分と endcap 部分の境界に向いていないことに対する条件

図 4.3-(3) で $\theta_{missing}^*$ が 45 度付近と 145 度付近は、Bhabha 散乱において、電子がカロリメーターの barrel 部分と endcap 部分の境界に向かっていているような事象である。また、カロリメーターの境界部分ではエネルギーを正しく測定できない。このことから、この条件を課した。

iii. アコプナリティ角 ϕ_{acop} が 1 度より大きいこと ($\phi_{acop} > 1^\circ$)

アコプナリティ角は x-y 平面において、最も運動量の大きい荷電飛跡と 2 番目に高い運動量を持つ荷電飛跡とがなす角であり、 $\phi = 180^\circ - \phi_{open}$ と表せる (図 4.4)。 ϕ_{acop} が 1 度付近では Bhabha 散乱やミュオン粒子対生成反応といった back-to-back 反応が起きていることが多い。

(b) ハドロン生成反応を除く ($X_{part} \equiv (n_{part})_{one} \times (n_{part})_{other} \leq 25$)

ハドロン事象とは $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ や $e^+e^- \rightarrow B\bar{B}$ 過程のことで、これらの事象の特徴として荷電粒子や光子の数が多いという事があげられる。そこで、一つの半球内にある粒子の数を荷電飛跡の数と光子の数の和とし、 $n_{part} = n_{track} + n_\gamma$ で表す。ま

³ニュートリノが検出できないために生じる不変質量の不足分。以降では MM と書くこととする。

⁴MM と同様の理由で生じる運動量不足分の方角

⁵4 元運動量は一般に、 E をエネルギー、 \mathbf{P} を運動量とした時、 $p^2 = (E)^2 - (\mathbf{P})^2$ と定義される。よって MM をエネルギーと運動量を使って書くと、 $MM^2 = (E_{beam} - E_{tracks} - E_\gamma)^2 - (\mathbf{P}_{beam} - \mathbf{P}_{tracks} - \mathbf{P}_\gamma)^2$ となる。

⁶この段階で残っているものは、Bhabha 散乱などの中でも実際には出たはずの光子が検出できなかった事象である。こういった事象は光子が検出できなくても、MM や Missing Angle はゼロ付近となる。

⁷2 光子生成反応は電子と陽電子が高い運動量を持ってビームパイプ方向に進むことから、不足分 (missing) が大きいという特徴がある

た、それぞれの半球中について粒子の数を $(n_{part})_{one}, (n_{part})_{other}$ で表し、その積を $X_{part} \equiv (n_{part})_{one} \times (n_{part})_{other}$ と定義して、これが 25 以下であることを要求した。

(3) トリガー (trigger) 条件

Belle 実験ではビーム衝突反応と他の反応を区別するため、様々な physics trigger が用いられている。本解析では、以下のいずれかの trigger を満たしていることを要求した。

- (a) 荷電飛跡に関する trigger(F0,F3,F4,F5) ^{8, 9}
- (b) カロリメーターで観測されたエネルギーに関する trigger(F12) ¹⁰
- (c) カロリメーターと荷電飛跡に関する trigger(F44) ¹¹

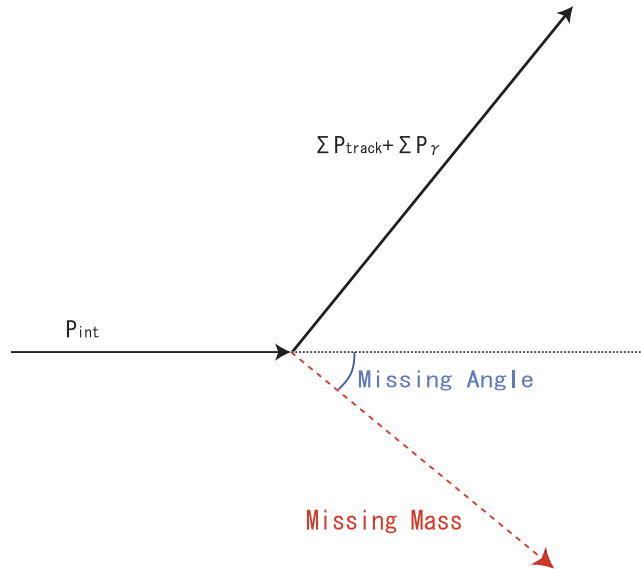


図 4.2: Missing Mass

以上、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象を選ぶための条件を表 4.2.2 にまとめた。

この条件で、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象を 1,370,812 event 観測した。

事象例として、 $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象の中で最も事象数の多い 2-prong 過程 (それぞれの τ 粒子が 1 本の荷電粒子を含む崩壊をしたとき、つまり、事象全体で荷電粒子が 2 本となるような事象) を図 4.5, 4.6 に示す。Belle 検出器において、 τ -pair 事象はこのように見える。

⁸full track(CDC でカールしていない荷電飛跡) が 2 本以上その荷電粒子のなす角が 135 度以上。TOF が 2 個所となっていること。トリガー段階で Bhabha でないこと。

⁹short track(飛跡が CDC を通過しきっていない荷電飛跡) が 3 本以上。フル荷電飛跡が 2 本以上あり、そのなす角が 135 度以上。TOF が 2 個所となっていること。

¹⁰カロリメーターで測定されたエネルギーが 1GeV 以上。トリガー段階で Bhabhaya、宇宙線でないこと。

¹¹カロリメーターで観測されたエネルギーが 0.5GeV 以上。short track が 2 本以上。full track が 1 本以上。荷電粒子のなす角は 135 度以上。トリガー段階で Bhabha、宇宙線でないこと。

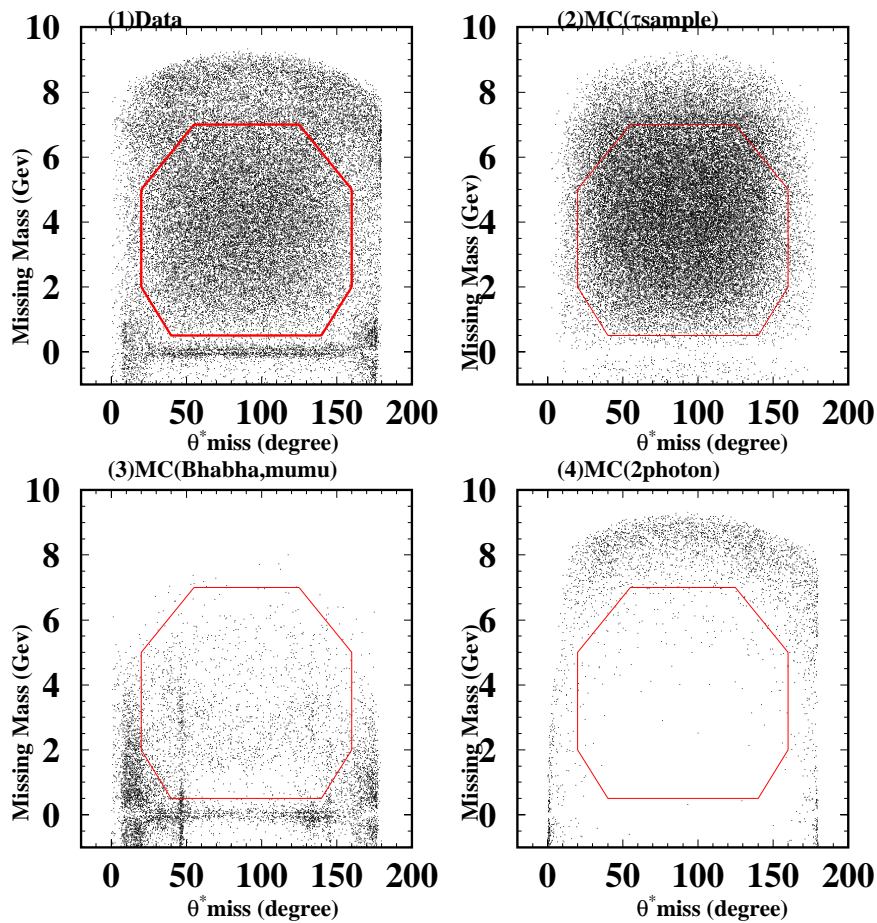


図 4.3: Missing Mass と Missing Angle の 2 次元 plot。(1) はデータを、(2)(3)(4) はモンテカルロシミュレーションによる分布で、順に τ -pair sample、radiative Bhabha 散乱からのバックグラウンド、2 光子生成反応からのバックグラウンドをそれぞれ示す。ここで、赤の多角形の枠内に入ったものを τ -pair 事象と見なしている。

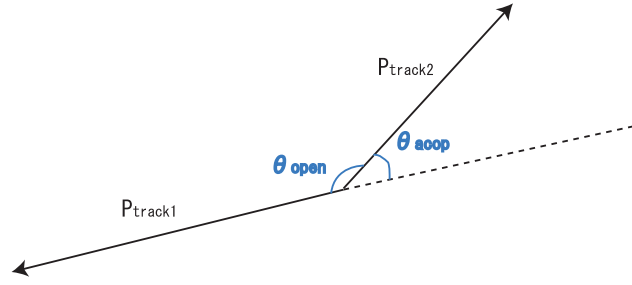


図 4.4: アコプナリティ角

このようにして選別した τ -pair 事象から、次の 4.3 節では本解析で用いた $\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 事象を選んでいく。

表 4.2: τ -pair 事象選別条件

$\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 事象選別		
item	効果	参照節
$2 \leq N_{track} \leq 4$		4.2.2
$ \Delta Q = 0$		4.2.2
$ V_Z < 2.5cm, V_r < 0.5cm$	ビームガス B.G. や宇宙線の除去	4.2.2
$35^\circ < \theta_{event}^* < 145^\circ$		4.2.2
$\sum P \leq 9.0GeV/c, \sum E \leq 9.0GeV$	クリーンな Bhabha 散乱・ミュー粒子対生成の除去	4.2.1
MM, $\theta_{missing}^*$ cut	Bhabha 散乱・2 光子生成反応の除去	4.2.2
ECL の境界部分の除去	Bhabha 散乱・2 光子生成反応の除去	4.2.2
$\phi_{acop} > 1^\circ$	Bhabha 散乱・2 光子生成反応の除去	4.2.2
$X_{part} \equiv (n_{part})_{one} \times (n_{part})_{other} \leq 25$	ハドロン事象の除去	4.2.2
physics trigger		4.2.2

4.3 $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 事象選別

この章では、前節で選別した $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 事象の中から $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ 事象を選別する。この手順は、事象選別の流れ図 4.1 においては、「 $\tau \rightarrow \pi \pi \nu$ 解析プログラム」に対応する。

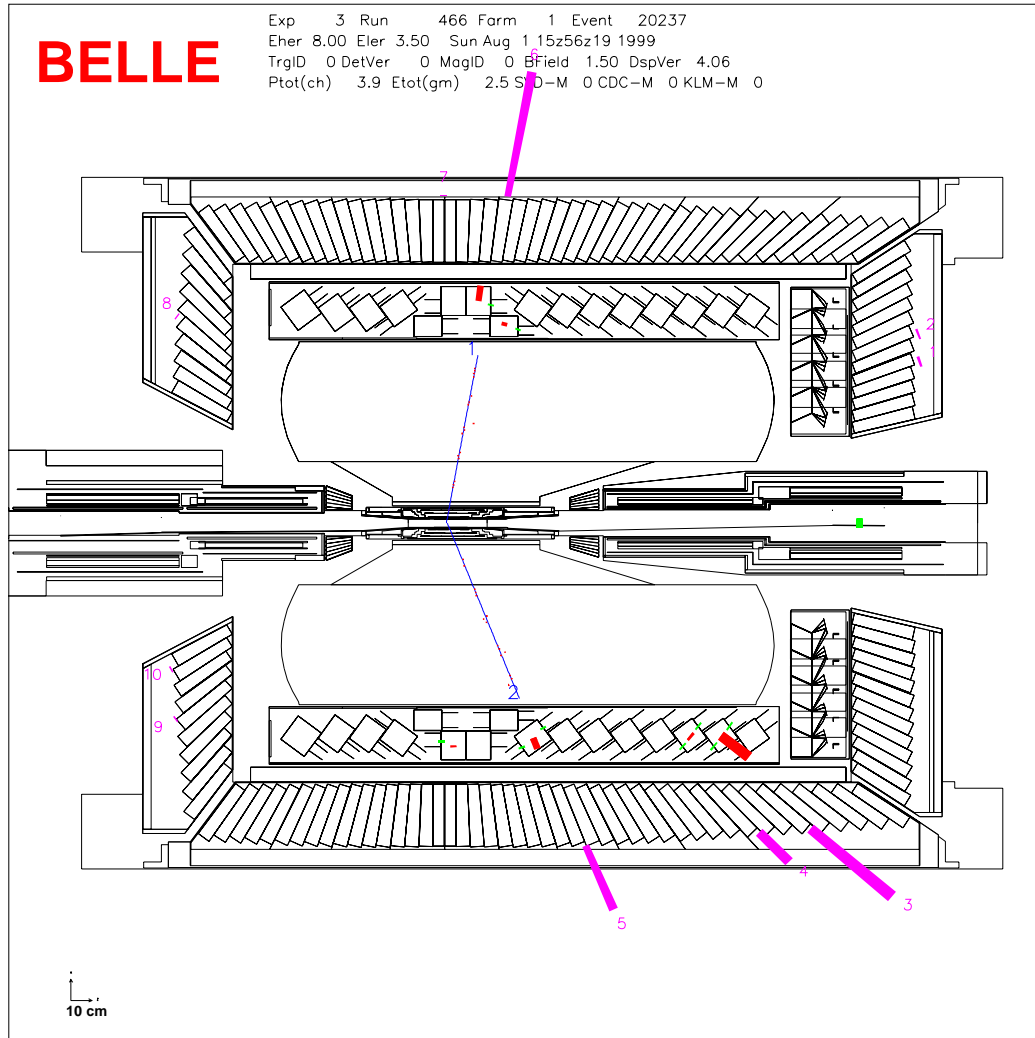


図 4.5: τ -pair 事象の例 (x - z 平面)。この事象では τ^- が $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊 (signal) をし、 τ^+ が $\tau^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_e\nu_\tau$ 崩壊をしている。

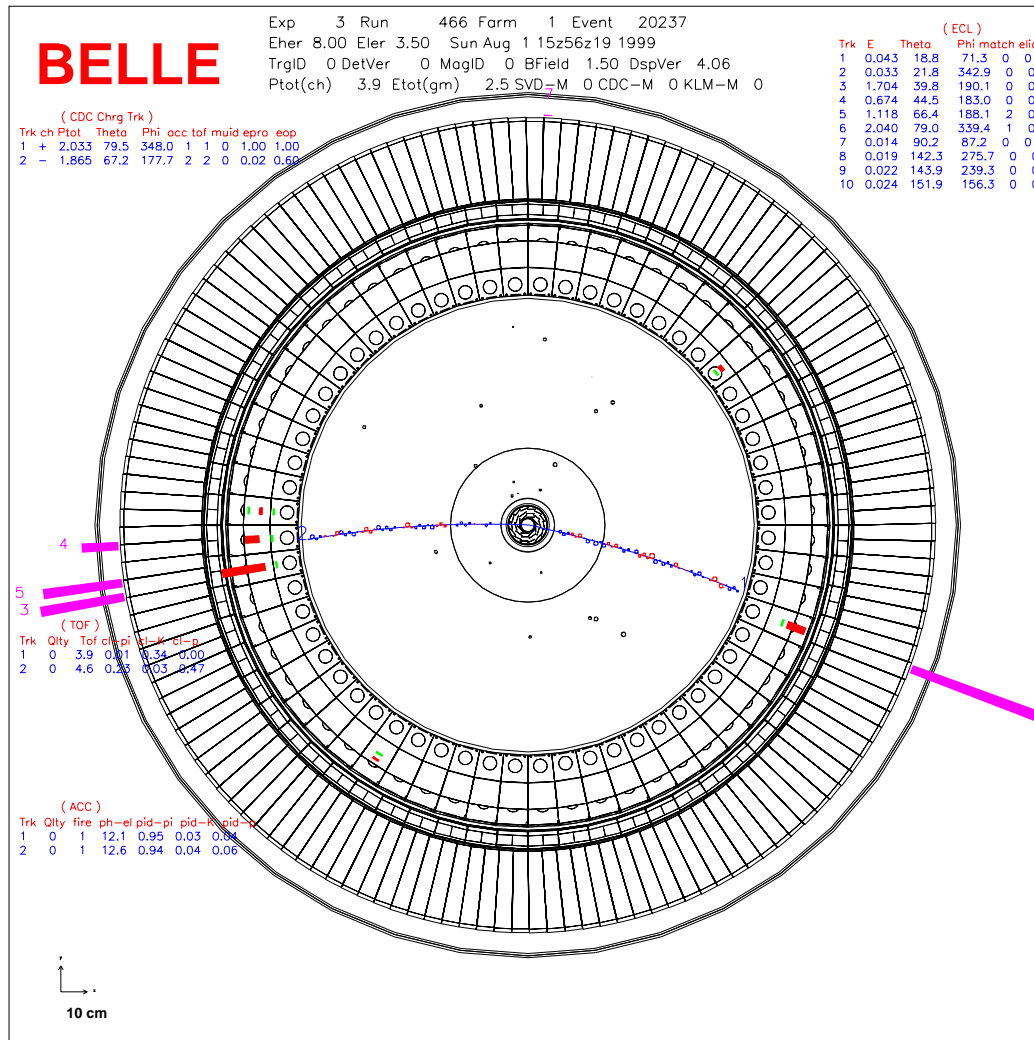


図 4.6: τ -pair 事象の例 (x-y 平面)。図 4.5 と同じ事象を x-y 平面で見た図。ビームは円の中心に紙面垂直に通っている。

4.3.1 π^0 の再構成

π^0 粒子は、ほぼ 100% の確率で光子 2 つに崩壊する ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$)。よって、2 つの光子を組み合わせることで、 π^0 を再構成する。

π^0 を再構成するために用いる光子として、以下の条件を課した。

- 光子のエネルギー補正
- $E_\gamma \geq 80.0 \text{ MeV}$
- $24^\circ \leq \theta_\gamma \leq 138^\circ$
- カロリメーターで観測された shower が光子らしいもの ($E9/E25 \geq 0.75$ ¹²、また、そのクラスターが CDC からの外挿と一致していないこと。)
- カロリメーターの barrel と endcap の境界で観測された光子を除く

これは、光子が検出器で正しく測定されるための条件である。

ここでは、緩い π^0 選別の条件として、

$$S_{\gamma\gamma} \equiv \frac{(m_{\gamma\gamma} - m_{\pi^0})}{\sigma_{\gamma\gamma}} \quad (4.2)$$

と定義した $S_{\gamma\gamma}$ が -9 から 9 の範囲に入っていることを要求した ($-9.0 < S_{\gamma\gamma} < 9.0$)。ここで、 $m_{\gamma\gamma}$ は 2 つの光子の不変質量、 m_{π^0} は π^0 の質量 ($= 134.98 \text{ MeV}$)、 $m_{\gamma\gamma}$ は $\sigma_{\gamma\gamma}$ は $m_{\gamma\gamma}$ の分解能である。

また、光子 2 つの不変質量の分解能、 $\sigma_{\gamma\gamma}$ と π^0 の運動量 P_{π^0} の関係を調べるために、 $\sigma_{\gamma\gamma}$ を P_{π^0} の関数として図 4.7 に示した。この図からわかるように、運動量の低いところでデータとモンテカルロに違いがみられる。この関係を fit し、得られた関数からモンテカルロを補正した。

4.3.2 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の選別

この節で、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊を選別するために行うのは、以下のことである。

- (1) $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊条件を要求する。
- (2) 本解析で目的としている $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊以外の τ 崩壊から来るバックグラウンド (feed across B.G.) を除く。
- (3) 前小節で得た π^0 候補から、サイドバンドを除く

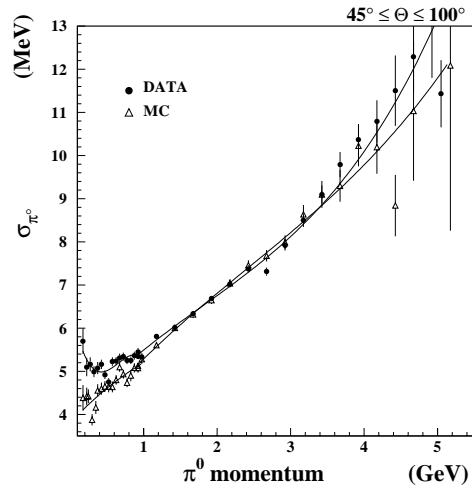


図 4.7: 各運動量における光子 2 つの分解能. $\sigma_{\gamma\gamma}$ を p_{π^0} の関数として plot している。ただし、この図には $45^\circ < \theta_{\pi^0} < 100^\circ$ という条件が入っている。黒丸はデータを白の丸はモンテカルコを示している。

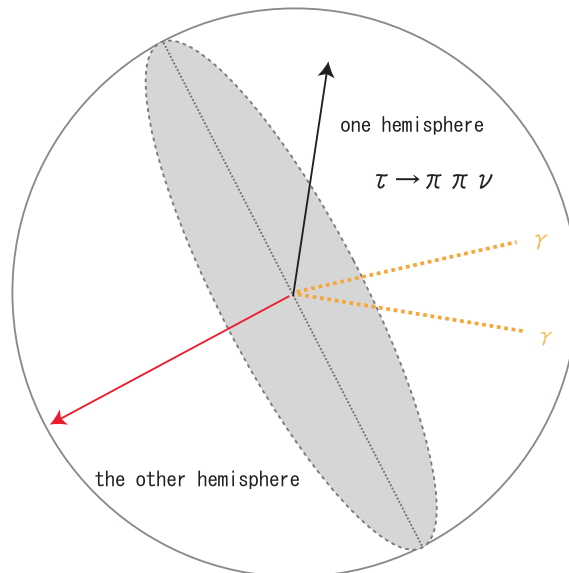


図 4.8: 事象の半球図

(1) $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の条件として、

- 半球中に、荷電飛跡が1本、 π^0 粒子が1つある。

という条件を要求した。 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊事象はこの条件により基本的に選別できる。

また、(2) feed across バックグラウンドを除く条件としては、

- π^0 から崩壊した2つの光子以外に、そのエネルギー (E_γ^{max}) が 200MeV 以上のものがあればその事象を除く ($E_\gamma^{max} < 200\text{MeV}$)。これにより、 $\tau \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ といった (multi- π^0 mode¹³) を除去することができる。
- $P_{\pi^0}/E_{beam}^* > 0.04$

を要求した。

次に、 π^0 について考える。これは条件の(3)に相当する。

前小節で選別したものを π^0 とし、2つの光子 (π^0) の不変質量分布を、4.2式で定義した $S_{\gamma\gamma}$ の形で図4.9, 4.10に示す。

これらからわかるように、データとモンテカルロは非常によく合っている。しかしながら、 $|S_{\gamma\gamma}|$ の大きいところでは、少し違いが見られる。よって、図4.9にあるように、

シグナル領域 $-6 < S_{\gamma\gamma} < 5$ (図4.9中の黄色の矢印)

サイドバンド領域(左) $-9 < S_{\gamma\gamma} < -7$ (図4.9中の水色の矢印)

サイドバンド領域(右) $7 < S_{\gamma\gamma} < 9$ (図4.9中の水色の矢印)

とし、二つの光子の組み合わせを誤ったり、 π^0 からではない光子を用いた事によるの寄与と考えられる'サイドバンド'を引くこととする。

方法としては、 $S_{\gamma\gamma}$ 全領域において、この寄与は一様な分布をすると仮定し、シグナル領域に含まれるこの寄与 ($BG_{signal-region}$) をサイドバンド領域を用いて

$$BG_{signal-region} = (N_{side-band}^{left} + N_{side-band}^{right}) \times \frac{11}{4}$$

と見積もりシグナル領域に入った全事象数 ($N_{signal-region}^{total}$) から引いた。

$$N_{signal} = N_{signal-region}^{total} - BG_{signal-region}$$

¹² カロリーメーターのクラスターにおいて shower のピーク辺りの、E9 はクリスタル9本の、E25 は25本のエネルギーの和。E9/E25 はこの2つの数の比であり、この数から shower の広がりがわかる。一般にハドロンが作る shower は広がりが大きい事が知られている。

¹³ 終状態に複数個の π^0 を含むような崩壊モード

ここで、 $N_{side-band}^{left}$ と $N_{side-band}^{right}$ はサイドバンド領域の左と右に入ったそれぞれの事象を、 N_{signal} はシグナル領域に入った事象の中での、本物と思われる事象を示している。また、シグナル領域が 11σ に対して、サイドバンド領域が左と右と合わせて 4σ なので、規格化定数として $BG_{signal-region}$ を見積もる際、 $(N_{side-band}^{low} + N_{side-band}^{high})$ に $11/4$ をかけた。

データにおいてサイドバンド領域に入った事象数のシグナル領域に入った事象数に対する割合は、約 9.5%¹⁴ である。シグナル領域とサイドバンド領域に分け、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布として図 4.11 に示した。また、モンテカルロについても同様の図を τ -pair、feed across バックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ 反応によるバックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}$ 反応によるバックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-u\bar{u}$ 反応によるバックグラウンドに分けてそれぞれ 図 4.12 に示した。ここで、 τ -pair 事象以外の反応からのバックグラウンドをまとめて、non- τ バックグラウンドと呼ぶこととする。

以上のようにして、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選び、約 32 万事象観測した。ここで $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選ぶために用いた条件とそれによる効果、詳しい事象数を表 4.3 に示した。

表 4.3: $\tau^\pm \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象選別

item	事象数 (Exp9)	Efficiency	各条件の相対的な Efficiency
荷電飛跡 1 本	2,308,877	97.1 %	97.1 %
π^0 1 つ	495,739	51.0 %	52.5 %
$E_\gamma^{max} < 200$ の光子の除去	390,652	47.1 %	89.7 %
$P_{\pi^0}/E_{beam}^* > 0.04$	376,877	46.5 %	98.7 %
π^0 シグナル領域 ($-6 < S_{\gamma\gamma} < 5$)	353,355	43.9 %	94.2%
π^0 サイドバンド領域	12,238	0.9 %	
($-9 < S_{\gamma\gamma} < -7$)	8,227		
($7 < S_{\gamma\gamma} < 9$)	3,961		

また、このようにして $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選んだ時の π^0 の運動量を図 4.13 に、荷電粒子 (荷電飛跡) の運動量分布を図 4.15 に示す。 π^0 の運動量を図 4.13 に示す。ここで、

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{N_{Data} - N_{MC}}{N_{MC}} \\
 &= \frac{Data}{MC} - 1
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

と定義した、 R を用いて図 4.3.2, 4.3.2 に示し、データとモンテカルロの一致を確かめた。

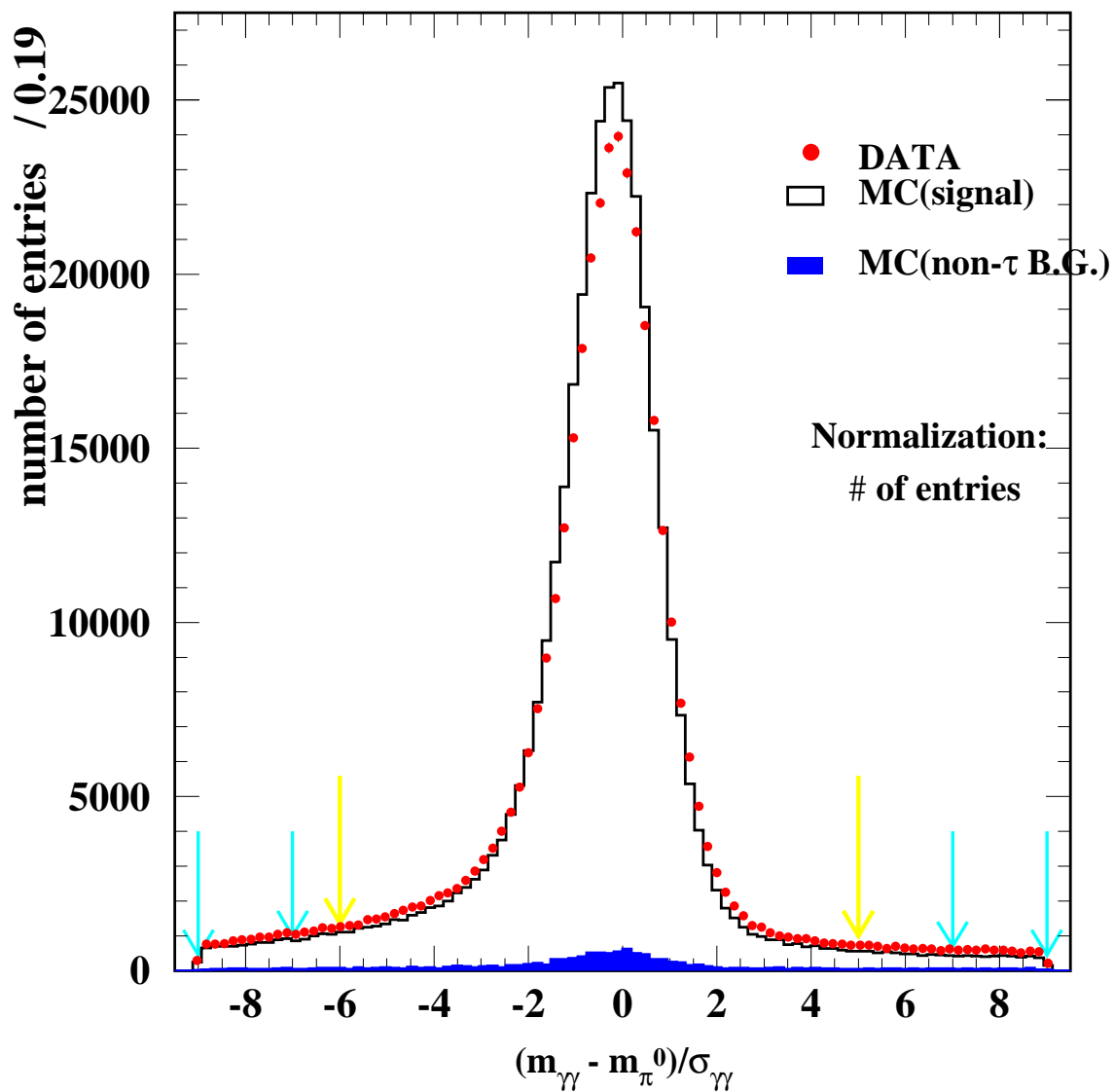


図 4.9: π^0 シグナル分布 ($S_{\gamma\gamma} = (m_{\gamma\gamma} - m_{\pi^0})/\sigma_{\gamma\gamma}$). 赤の点はデータを、ヒストグラムは MC によるシグナルを、色 (青) のついたヒストグラムは τ 以外から来るバックグラウンドをそれぞれ示す。黄色の矢印はシグナルの範囲 $-6 < S_{\gamma\gamma} < 5$ を、水色の矢印はサイドバンドの範囲 $-9 < S_{\gamma\gamma} < -7$, $7 < S_{\gamma\gamma} < 9$ を表している。(また、この π^0 の事象には $\pi^0 1 - C fit$ が要求されている。)

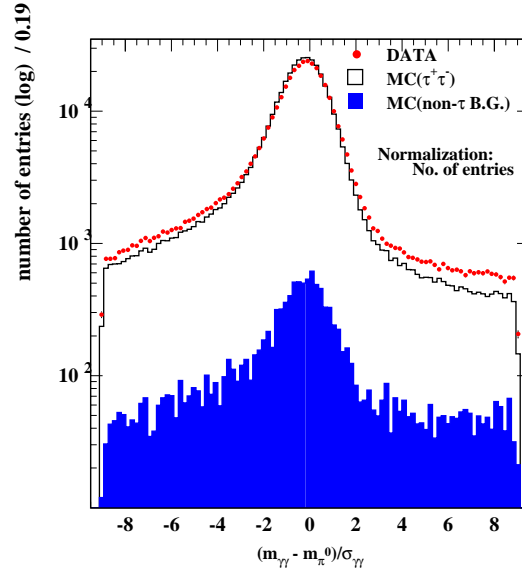


図 4.10: π^0 シグナル 分布 (log). ヒストグラムなどの意味は図 4.9 と同じである。

また、運動量ごとの π^0 分布を調べるために、 $P_{\pi^0}^*/E_{beam}^*$ の範囲ごとの $S_{\gamma\gamma}$ 分布を図 4.17 に示した。

4.3.3 $\pi^- \pi^0$ の不変質量分布 ($M_{\pi^\pm \pi^0}^2$)

前小節 4.3.2 のように選んだ $\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 事象での、 $\pi^- \pi^0$ の不変質量分布を図 4.18 に示す¹⁵。

ここで、モンテカルロの値としては表 4.3.3 にある値を使っている。通常モンテカルロを発生させる際の値としては、PDG(Particle Data Group) の値を使うが、今回は ρ 中間子の質量 (m_ρ) の値として、PDG の値 (769.3 MeV) ではなく、775.3 MeV を用いた。

この理由は、「本解析では τ のデータを扱っているから」である。 m_ρ は、基となるデータの違いにより値が異なっていることが知られており、PDG の値 769.3 MeV は、

$$\begin{cases} m_\rho = 766.5 \text{ MeV} & \text{ハドロン反応の場合} \\ m_\rho = 776.0 \text{ MeV} & \tau \text{ と } e^+e^- \text{ 実験の場合} \end{cases}$$

の 2 つの値の平均値である。よって、今回のように τ のデータを扱う場合は、 $m_\rho = 776.0 \text{ MeV}$ を用いた方が適切と言える。

¹⁴ $\frac{12,238 \times (4/11)}{353,355} = 0.095$

¹⁵ 2 章でふれたように本解析の目的であるスペクトル関数の測定においては、その式の中に $(\pi^- \pi^0)^2$ の不変質量があることから $\pi^- \pi^0$ の不変質量分布を質量の 2 乗を横軸に取る形で示した。

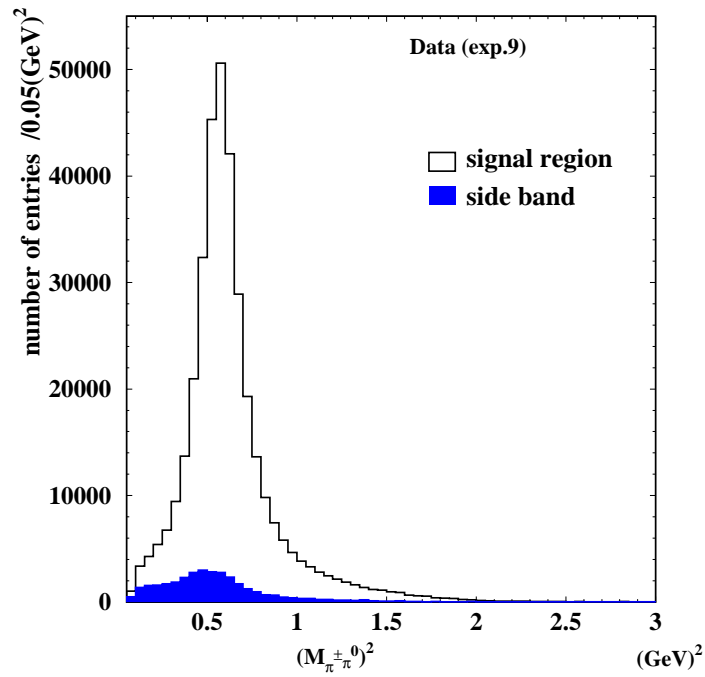


図 4.11: シグナル領域とサイドバンド領域における $(M_{\pi^+\pi^0})^2$ 分布。 ヒストグラムはシグナル領域に入った事象を、色 (青) のついたヒストグラムはサイドバンド領域に入った事象を示している。次の節からは、サイドバンド領域に入った事象 (色 (青) のついたヒストグラム) を引いたデータを使用する。

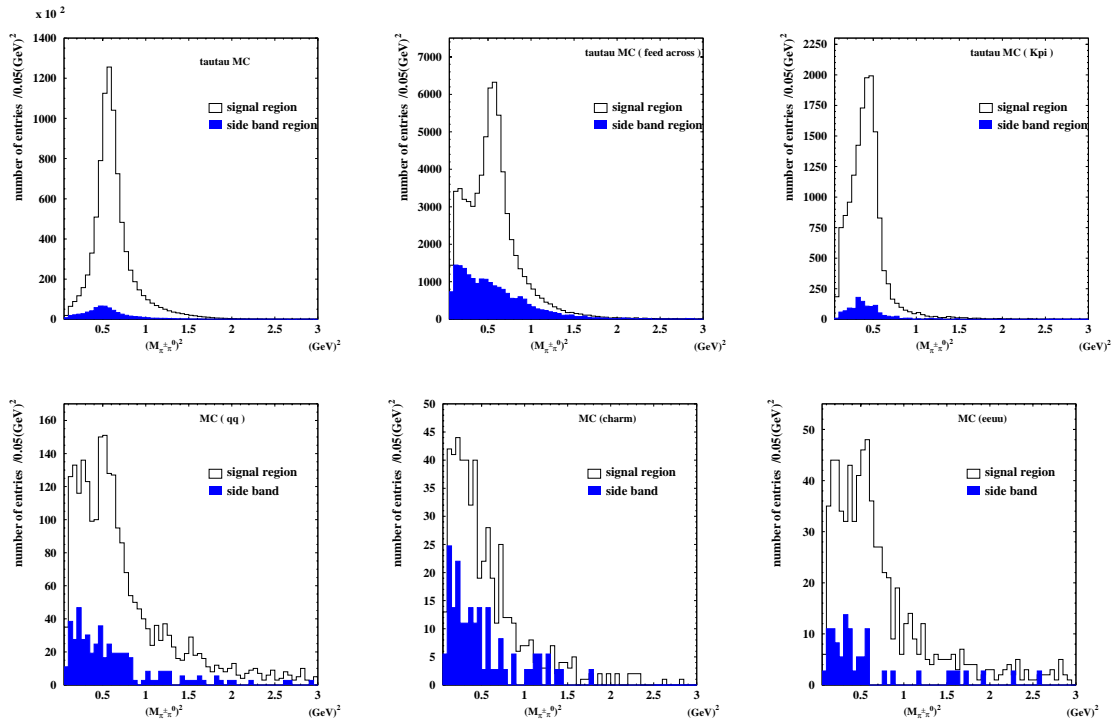


図 4.12: モンテカルロにおける、シグナル領域とサイドバンド領域の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布。図は順に、 τ -pair、feed across バックグラウンド、 $\tau \rightarrow K\pi^0\nu_\tau$ 反応からの feed across バックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ 反応によるバックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}$ 反応によるバックグラウンド、 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-u\bar{u}$ 反応によるバックグラウンドである。

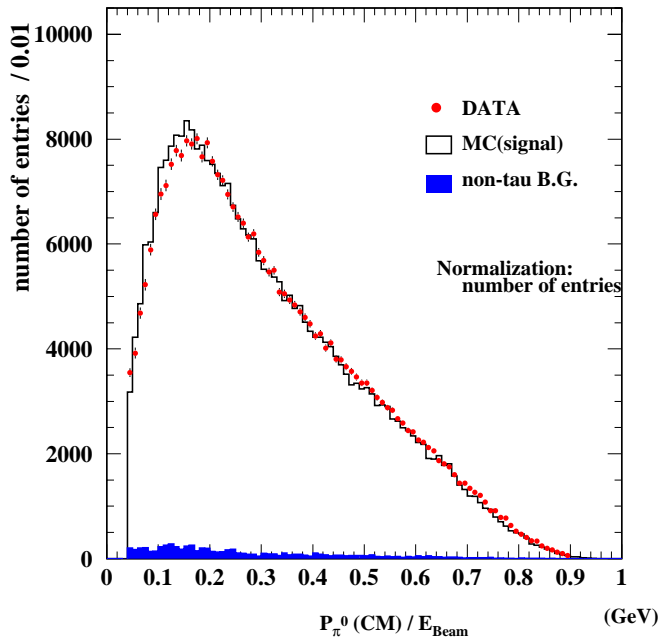


図 4.13: π^0 の運動量分布 (P_{π^0}/E_{beam}). ここでは、 π^0 の運動量 (P_{π^0}) をビームのエネルギー (E_{beam}) で割った形になっている。赤の点はデータを、ヒストグラムは MC のシグナルを、色つきのヒストグラムは $non - \tau$ からのバックグラウンドをそれぞれ示す。

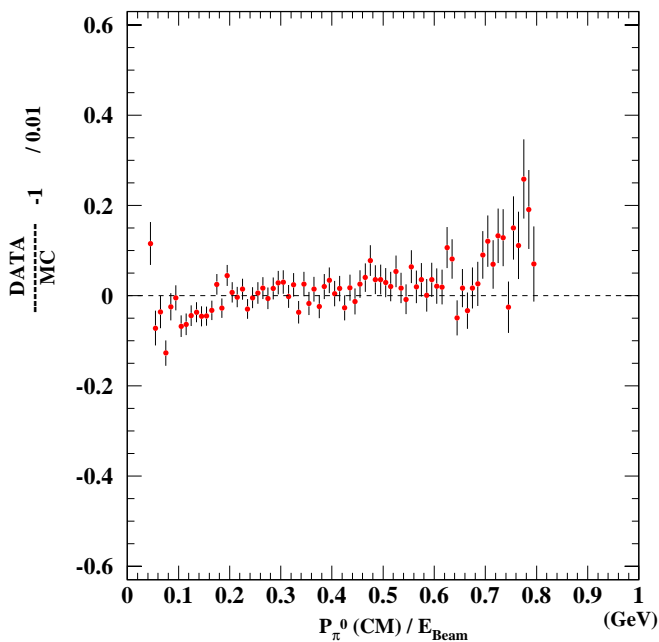


図 4.14: π^0 の運動量分布の $R = \frac{Data}{MC} - 1$ plot. 横軸に π^0 の運動量を、縦軸に $R = \frac{Data}{MC} - 1$ をとった図。ここでの π^0 の運動量は、図 4.13 と同じである。

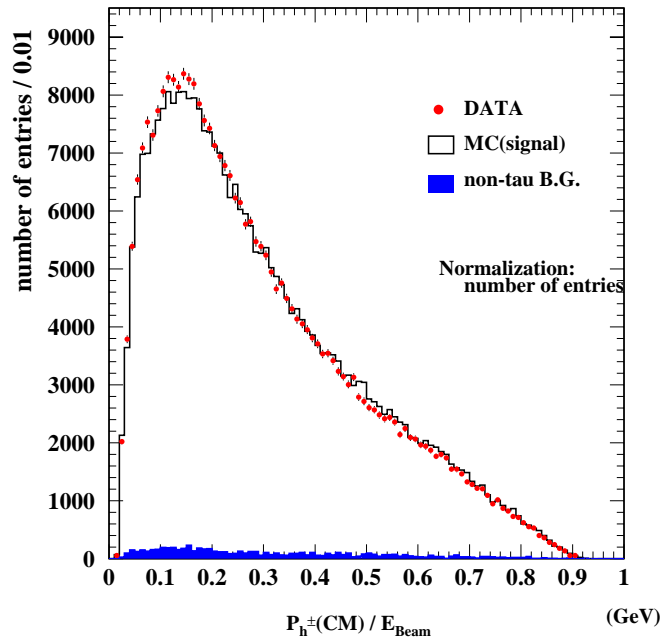


図 4.15: π^- の運動量分布図 (P_{π^-} / E_{beam}). ここでも、 π^0 の運動量と同じく π^- の運動量 (P_{π^-}) をビームのエネルギー (E_{beam}) で割った形になっている。点やヒストグラムの意味は、図 4.13 と同じである。

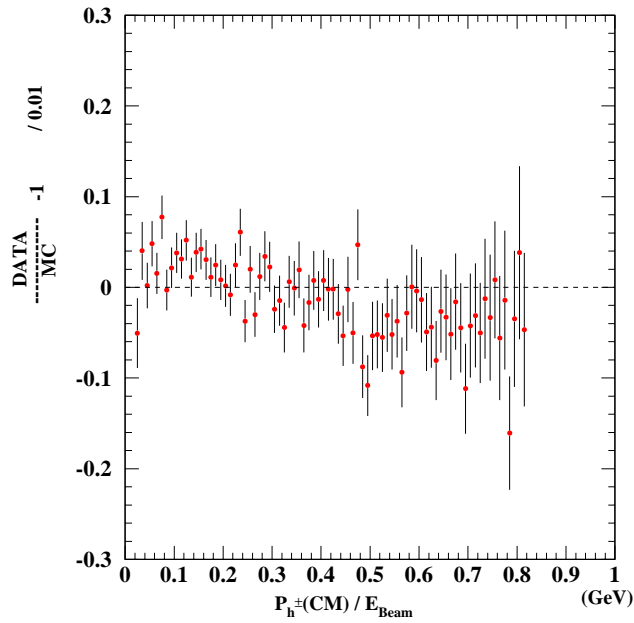


図 4.16: π^0 の運動量分布の $R = \frac{Data}{MC} - 1$ plot. 横軸に π^- の運動量を、縦軸に $R = \frac{Data}{MC} - 1$ をとった図。ここでの π^- の運動量は、図 4.15 と同じである。

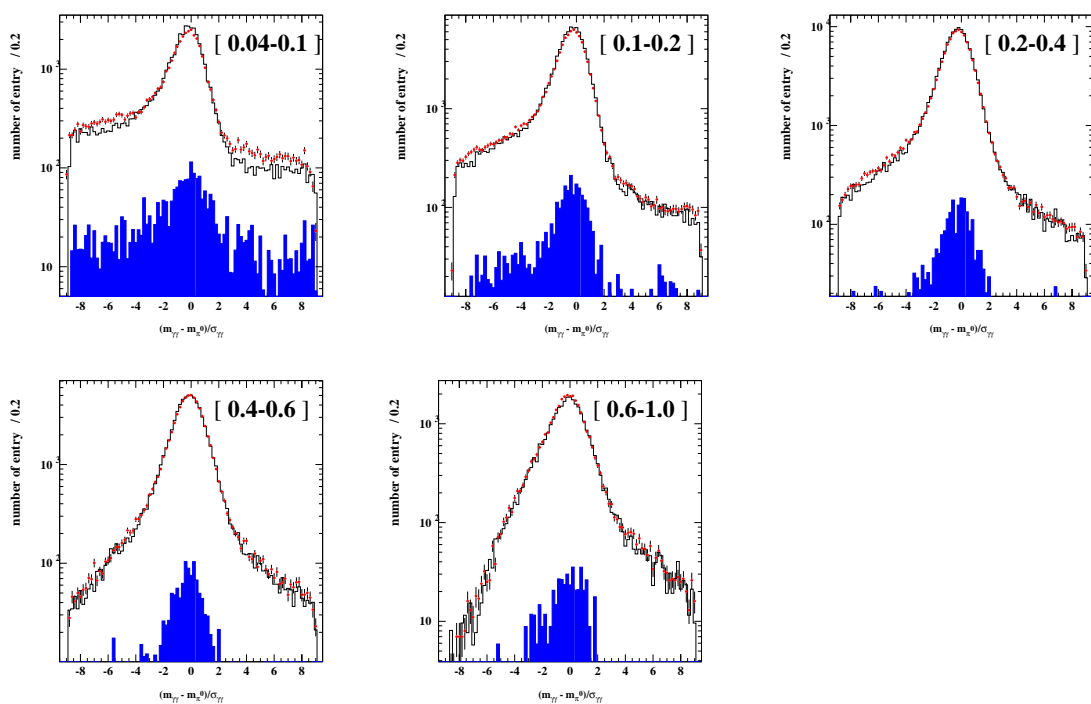


図 4.17: π^0 運動量ごとの $S_{\gamma\gamma}$ 図. ここで、図中の $[-]$ は、 $\frac{p_{\pi^0}^*}{E_{beam}^*}$ の範囲を示している。

表 4.4: MC (TAUOLA / KORALB) における ρ , ρ' の値。

ρ, ρ' parameters in MC	
M_ρ	775.3 MeV (c.f. 769.3 MeV in PDG)
Γ_ρ	150.2 MeV
$M_{\rho'}$	1370 MeV
$\Gamma_{\rho'}$	510 MeV
β	-0.110

この裏付けとして、 m_ρ の値に 「 $m_\rho = 766.5 \text{ MeV}$ を使った場合の $(\pi^- \pi^0)^2$ 分布」を付録 A に示した。

図 4.18 において、きれいな $\rho(770)$ 共鳴状態のピークを見ることができる。このことは、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊において、 $\tau \rightarrow \rho \nu_\tau$ 崩壊が支配的であることを示している。しかし、図 4.18 をよく見ると、質量の高い範囲でわずかながら肩が見られる。これは $\rho(770)$ 共鳴状態の励起状態である $\rho'(1400)$ 共鳴状態であり、 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊には、 $\tau \rightarrow \rho' \nu_\tau$ 崩壊も含まれていることがわかる。

さらに、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の範囲により、 π^0 の分布に違いが現れないか確かめるために、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の範囲をいくつかに分け、この範囲ごとの $S_{\gamma\gamma} \equiv \frac{(m_{\gamma\gamma} - m_{\pi^0})}{\sigma_{\gamma\gamma}}$ 分布を図 4.19 に示した。 π^0 による寄与はどの質量の範囲でも同じであり、質量の大きい範囲 ($2.5 < (M_{\pi\pi^0})^2 \leq 3.0$) では、事象のほとんどが $non - \tau$ からのバックグラウンドだということが確かめられた。

次の章では、ここで得た $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布から、「 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の unfolding」と、本解析の目的である「スペクトラル関数の測定」を行う。

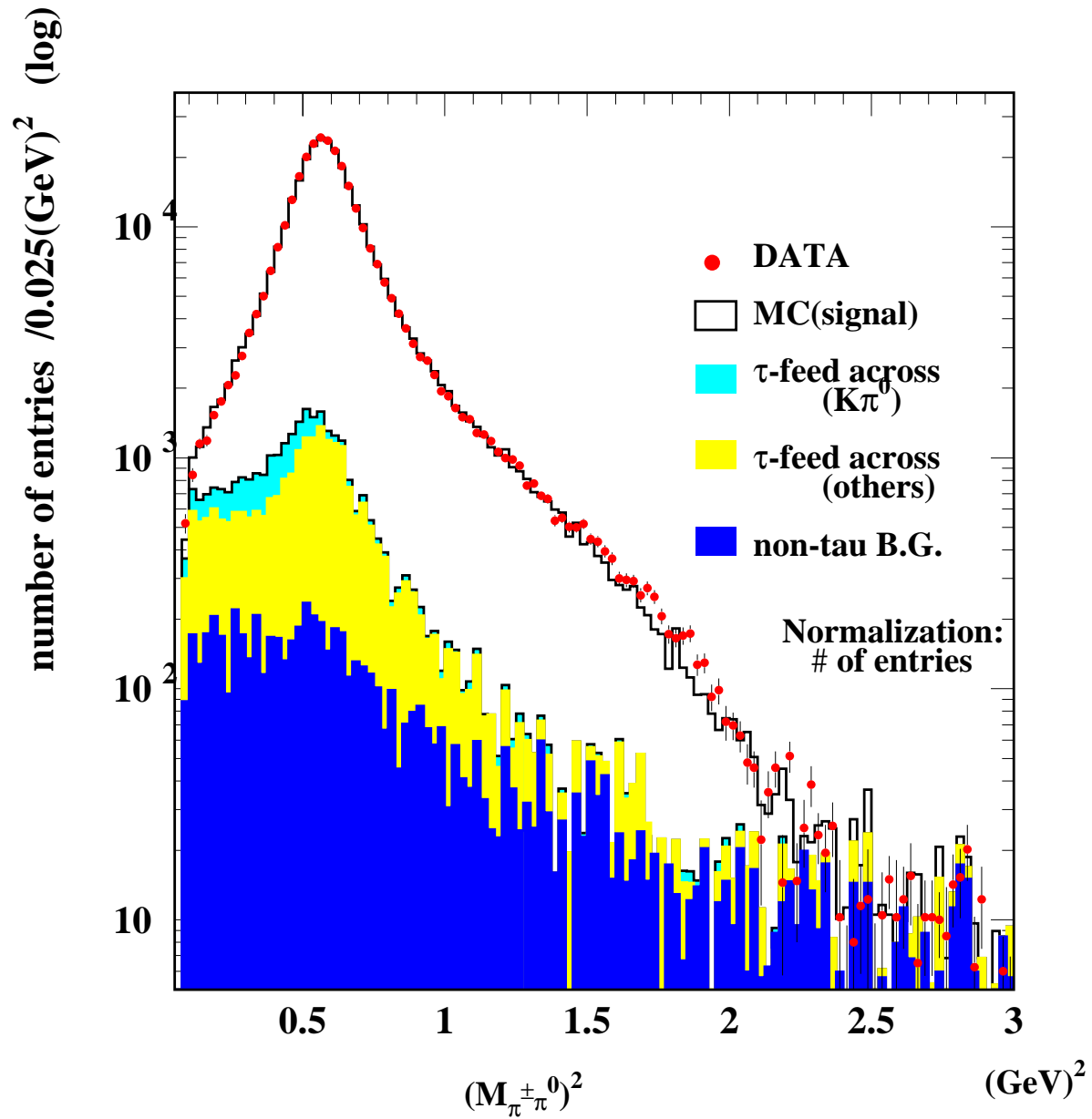


図 4.18: $\pi^-\pi^0$ 不変質量の 2 乗分布 ($(M_{\pi^{\pm}\pi^0})^2$)。縦軸に対しては、log スケールを採用している。赤の点がデータ、ヒストグラムがモンテカルロによる τ からの崩壊サンプルを示す。水色のヒストグラムは $\tau \rightarrow K\pi\nu$ による feed across バックグラウンドを、黄色のヒストグラムはそれ以外の feed across バックグラウンドを、青ヒストグラムは $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 以外からのバックグラウンドをそれぞれ示す。

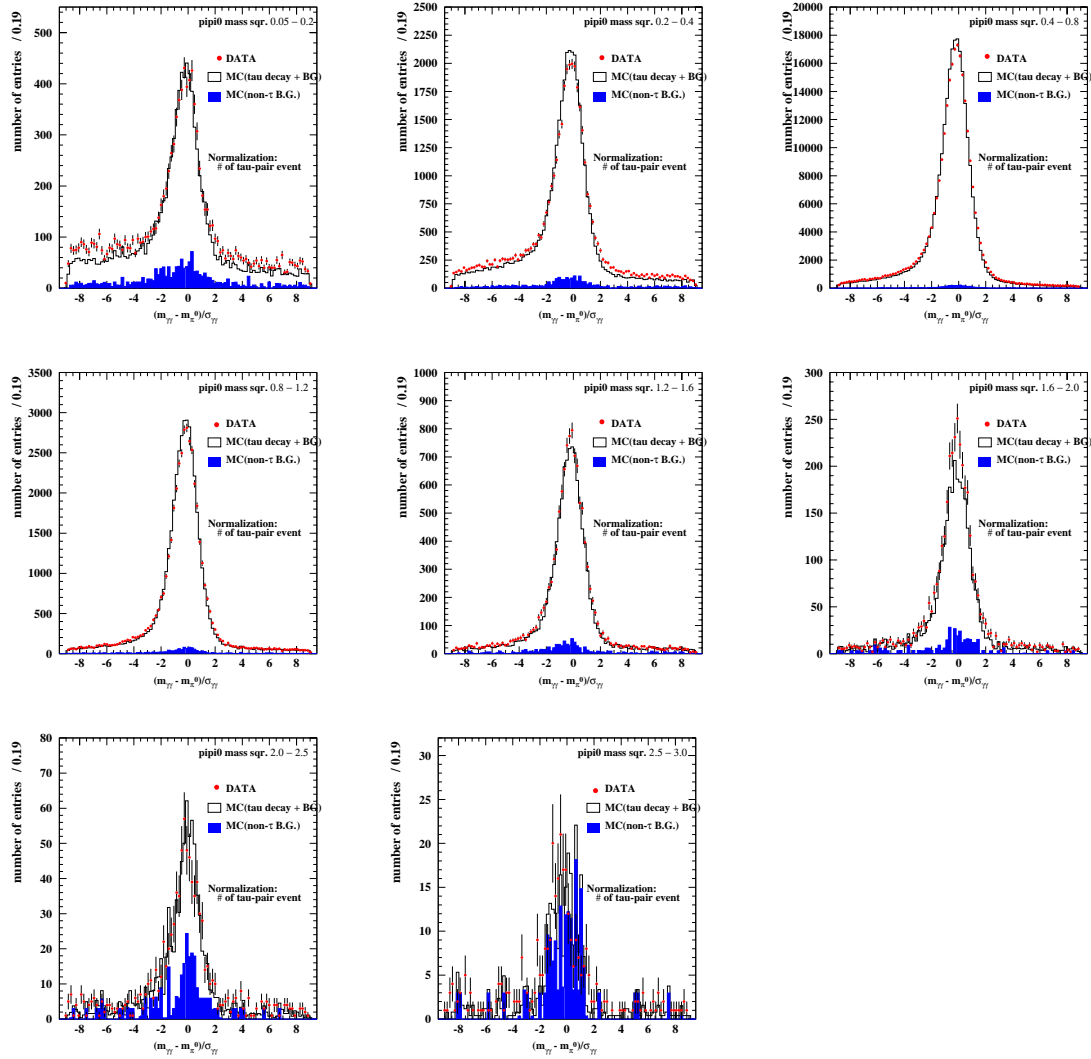


図 4.19: $\pi^\pm \pi^0$ の質量 $((M_{\pi\pi^0})^2)$ ごとの $S_{\gamma\gamma}$ 図。ここで、図中の 'pipi0 mass sqr.' の次に書かれた値は、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲を示している。

第5章 $\pi^- \pi^0$ スペクトラル関数 測定

この章では4章で得た $\tau \rightarrow \pi \pi^0 \nu_\tau$ 崩壊からの、 $(M_{\pi^\pm \pi^0})^2$ 分布を unfolding し、検出器の寄与などが入っていない $(M_{\pi^\pm \pi^0})^2$ 分布を得て、そこから本解析の目的であるスペクトラル関数の測定を行う。この章で行う手順を以下に示した。

1. unfolding プログラムのテスト (5.2 節)
2. データの unfolding (5.3 節)
3. unfold した分布の fitting と他の実験との比較 (5.3 節)
4. スペクトラル関数と、パイオンの構造因子を求める (5.4 節)

5.1 unfolding

この節では、「unfolding」について述べる。

一般に、観測された不変質量には、その検出器のアクセプタンスや分解能等からの寄与がある。このため、検出器から得た質量分布は実際の分布 (真の分布) と同じではなく、幾分歪められている。よって、真の分布を得るにはこれらによる歪みを考慮する必要がある。このとき、「観測された分布」から、統計的に意味を持つデータのみを用いて、検出器に入る前の「真の分布」を求めることを、「unfolding」という。

unfolding で真の質量分布を求めることは、高エネルギー実験にとって非常に重要なことであるにも関わらず、unfolding することは難しく、様々な研究が行われている。現在確立されている unfolding の方法としては、CERN で行われていた ALEPH 実験で開発され発展した 'Singular Value Decomposition' 法 [18] や、DESY 実験で発展した 'Bayes theorem' 法 [4] などがある。

今回、本解析に用いたのは、'Singular Value Decomposition (SVD)' 法で、この方法は、比較的シンプルな方法であると言われている。

以下で、unfolding と SVD unfolding 法について簡単に述べる。(詳しくは [18] 参照)

まず、真の分布、検出器の response matrix、観測によって得られた分布をそれぞれ

$$\begin{cases} \text{真の分布 (今知りたい分布)} & \dots \mathbf{X}_j \ (X = x_1, \dots, x_n) \\ \text{検出器の response matrix} & \dots \hat{\mathbf{A}}_{ij} \ (\hat{\mathbf{A}} = \hat{A}_{11}, \dots, \hat{A}_{mn}) \\ \text{観測された分布} & \dots \mathbf{b}_i \ (b = b_1, \dots, b_m) \end{cases}$$

とおく。ここで検出器の response matrix は、「真の分布では、Bin=j であった事象が観測された分布では Bin=i で再構成される確率」で与えられる。本解析において検出器の response matrix は、モンテカルロシミュレーションを用いて得たが、これについては 5.3.1 節で詳しく述べる。これらを使って 3 つの関係を表すと、

$$\sum_j \hat{A}_{ij} x_j = b_i \quad (5.1)$$

のようになる。数学的にこの解を求めようとするならば、

$$X = A^{-1}b$$

となる。response matrix A が、もし対角要素のみならば、「真の分布での Bin j = 再構成したときの Bin i」となり、問題はない。しかし実際には非対角要素があり、これがあるとき統計的なふらつきが拡大されて見える。これにより、式 5.1 のように response matrix の逆行列を作用させても、正しい分布が得られない。(付録 5.2 に簡単な例を示した。) そこで SVD unfolding では以下のようにして統計的に意味を持たない部分を除いている。

まず、response matrix A を

$$\begin{aligned} A &= USV^T \\ &= U \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix} V^T \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで、 U と V は直行列¹、 S は対角行列²であり、

$$s_i \geq s_{i+1} \quad (5.3)$$

となっている。この順に並べることが重要であり、これは、後から統計的に意味のないところを除くために使う。式 5.2 を使い、式 5.1 式を表すと、

$$USU^T X = b \quad (5.4)$$

となる。これを変形して、

$$SV^T X = U^T b \quad (5.5)$$

ここで、 X と b を回転させた系で考えることにする。

$$\begin{cases} \text{真の分布 } X \text{ を回転させた系} & Z = V^T X \\ \text{観測された分布 } b \text{ を回転させた系} & d = U^T b \end{cases}$$

¹ $UU^T = U^T U = I$

² $s_{ij} = 0$ (for $i \neq j$) , $s_{ii} \equiv s_i \geq 0$. ここで、 s_i は Matrix A の singular value と呼ばれる。

上の回転させた系を用いると、

$$SZ = d \quad (5.6)$$

となる。真の分布を回転させた系である Z を求めると、解は以下のようになる。

$$Z_i = \frac{d_i}{S_i} \quad (5.7)$$

しかし、このままでは前にも書いたように S_i が小さいとき、統計誤差が拡大されしまう。

この解において、統計的に意味を持たないのは、「 $d_i =$ 統計誤差」となるようなところである。この場合のデータを除くために 'cutoff parameter τ ' を導入し、式 5.7 を

$$z_i = \frac{d_i s_i}{s_i^2 + \tau} \quad (5.8)$$

と定義し直す。ここで、

$$\tau = S_k^2 \quad (5.9)$$

であり、 k は「データとして意味のあるところと、統計的に意味のないところを区別するための値」であり、「responce matrix A の rank」と呼ばれている。つまりこれを使うと

$$\begin{cases} \tau < S_i \cdots & \text{意味のあるデータとして unfolding に用いる} \\ S_i^2 \tau \cdots & Z_i = 0 \text{ となり、統計的に意味のないデータとして無視する} \end{cases}$$

と言ったようにデータを区別することができる。では次に、「どのようにして ' τ ' を決めるか」について話を進める。

' τ ' は d の i 番目の項において、

$$\frac{d_i}{\sigma_{d_i}} = 1 \quad (5.10)$$

この意味は、「 d_i がそれ自身の統計誤差 σ_{d_i} と等しくなるところ」である。この判断のために、横軸に i 、縦軸に $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ を図 5.2 のようにとり、「初めて $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}| \sim 1$ となるような i の値」を「responce matrix の rank k 」とした。 i が k よりも大きいところのデータは unfolding に用いて、 i が k よりも小さいところのデータは除いている。

以上のようにして、統計的に意味のないところを除き、意味のあるデータのみを用いて、観測された分布から真の分布 X を求める方法が「Singular Value Decomposition (SVD) unfolding」法である。

ただし、実際の SVD unfolding では、単に k で有意義なデータとそうでない物を分け、統計的に意味を持たないと判断されたデータを一切使わないのではなく、「意味がないと判断された範囲のデータについては、データの重み (weight) を減らす」という形で、なめらかに cut を入れている。

また、bin 間の振動をさけるために、「物理量を扱う上では、隣り合う bin どうしでは大きな変化はない」という条件をいれている。この方法は、「smoothig(regularization)」と呼ばれている [??]

unfoldingにおいて、cutoff parameter の決定は非常に重要であり、これを誤ると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cutoff parameter が小さすぎる時} \cdots \text{求めた分布 } X \text{ は意味のない分布になる} \\ \text{cutoff parameter が大きすぎる時} \cdots \text{求めた分布 } X \text{ は物理的に重要な情報を欠いた分布になる} \end{array} \right.$$

となってしまう。この例は次の5.2節でもふれることとする。

また今回、実際に行った unfolding の流れを図5.1に示した。以下、unfolding を行う際はこれにのっとって進めた。図中の「unfolding program ~Singular Value Decomposition Method」がこの節で述べた内容に相当する。

5.2 SVD unfolding プログラムのテスト

今回用いたプログラムは、CERN program Library で開発され発展したもので、FORTRAN で書かれたプログラムである。実際のデータを使った unfolding を実行する前に、この unfolding のプログラムが正常に働いているか確かめた。方法としては、以下の通りである。

1. 既知の分布をテスト分布として使う。
2. 観測された分布は $b_i = \sum_j A_{ij} \cdot X_j$ で得るとする。ここで、response matrix A_{ij} はモンテカルロから得る。
3. 観測された分布を、統計誤差 Δb_j を使いガウス分布で smear した。
4. unfolding を実行する。
5. 得られた結果を fit する。
6. unfolding の結果得られた分布と最初のテスト分布を比較して、unfoldingin によって真の分布が得られているかどうかを確かめる。

この場合、単に統計誤差で smear しているだけなので、unfolding した結果は、プログラムが正しく働いているならば、もともとの分布(テスト分布)と一致しなければならない。以下では、この流れで unfolding のプログラムが正しく働いているか確かめた。

5.2.1 unfolding のテストに用いたデータ

まず、テスト分布として用いたのは、実際のデータを記述することにもなる Breit-Wigner の分布である。記述としては、5.3.2節で述べる Khün&Santamaria モデルを使い、 ρ のみを考慮した場合の分布とした。つまり、5.3.2節の式5.18が以下のように記述されるような分布である³。

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta} \cdot BW_\rho \quad (5.11)$$

³この分布は'Toy MC'を使って作った。

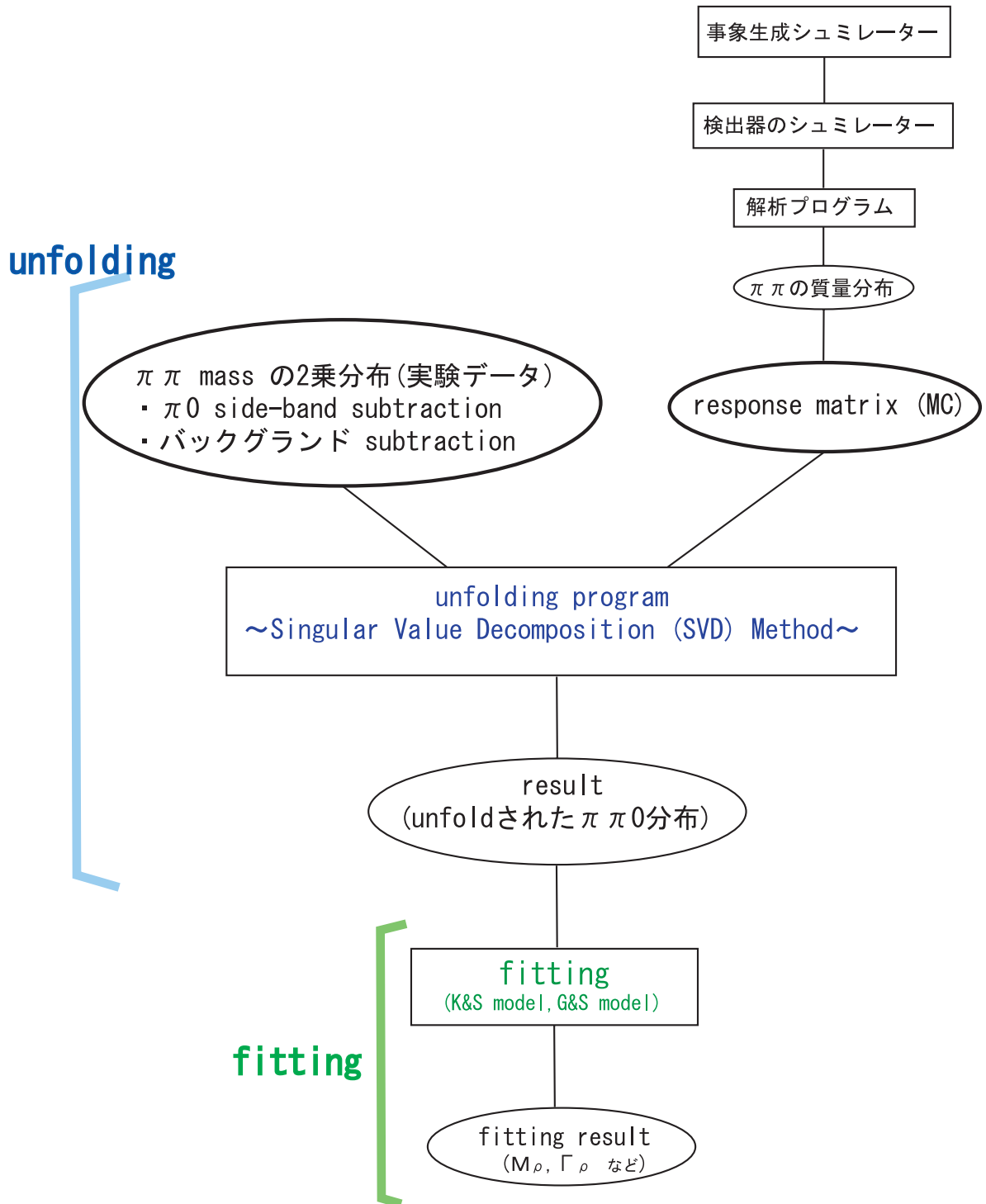


図 5.1: 実際のデータを入力として、unfolding する際の流れ

次に、response matrix についてだが、これは実データに対する unfolding を行った際に用いたのと同じものを使った。次の節 5.3 の図 5.10 を参照。この行列の要素を得る方法については次の節で述べる。

また、観測された分布は上でも述べたように、テスト分布から $b_i = \sum_j A_{ij} \cdot X_j$ で、これを統計誤差 $\Delta b_j = \sqrt{b_j}$ で smear することで得た。

これらのデータを用いて unfolding を実行した。

5.2.2 unfolding プログラムに対するテストの結果

unfolding の結果、図 5.2 のように rank=7 となり、分布を図 5.3 を得た。また、図 5.4 は、もともとのテスト分布から unfolding した結果得られた分布を引いた図であり、どの Bin においてもだいたい $1\sigma \sim 2\sigma$ の範囲内で一致していることがわかる。ここからも unfolding で得られた分布は、もともとの分布を再現できていることがわかる。

また、cutoff 変数の選び方を誤った例として、unfolding の結果得られた結果とそのときの $X^{test} - X^{unfold}$ 図を、図 5.5 ~ 図 5.8 に示した。図 5.5 と図 5.6 は rank=2 の場合であり、cutoff 変数が小さすぎる例である。一方、図 5.7 と図 5.8 は rank=49 の場合であり、cutoff 変数が大きすぎる例である。このいずれの場合も、unfolding で得られた結果がもともとのテスト分布を正しく再現できていないことがわかる。

5.2.3 unfolding で得られた分布の fit と真の分布との比較

unfolding して得られた分布 図 5.3 を、もともとのテスト分布を作ったときの形である、BW(K&S model) で fit する。fit した結果を図 5.9 と表 5.2.3 に示す。図 5.9 においては、fit に用いた関数が unfold して得られた分布とよく合っていることがわかる。いずれにおいても、unfolding された分布はテスト分布を正しく再現できていることがわかる。また、表 5.2.3 においては、fit の結果がテスト分布の要素と一致しているだけでなく、 $\chi/d.o.f$ の値ももともとな値になっている。

以上より、unfolding プログラムは正しく働いていることが確かめられた。次の章では、実際にデータの unfolding を行う。

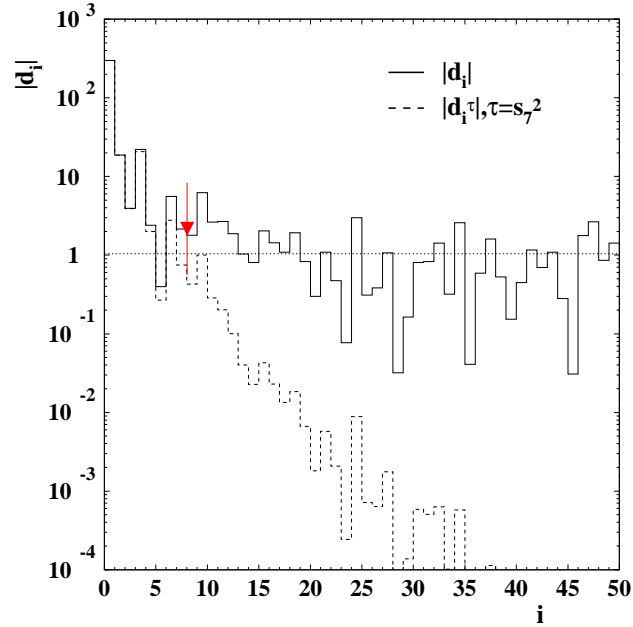


図 5.2: SVD unfolding のテストにおける $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 図。横軸に i 、縦軸に $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ をとった図。図中の矢印は「初めて $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}| \sim 1$ となるような i の値」、つまり rank を示している。今の場合 rank=7 となっている。図中のヒストグラムは実際の $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 分布であり、点線のヒストグラムは rank を考慮した場合である。このように、なめらかな cut を入れたデータを使い、unfolding を行った。

表 5.1: unfolding のテストにおける fit の結果

	テスト分布を作るときの値	<i>unfolding</i> で得られた分布を <i>fit</i> した結果
M_ρ (MeV)	774.9	774.1 ± 0.4
Γ_ρ (MeV)	144.2	144.6 ± 0.8
$\chi/d.o.f$		$63.2/46 = 1.37$

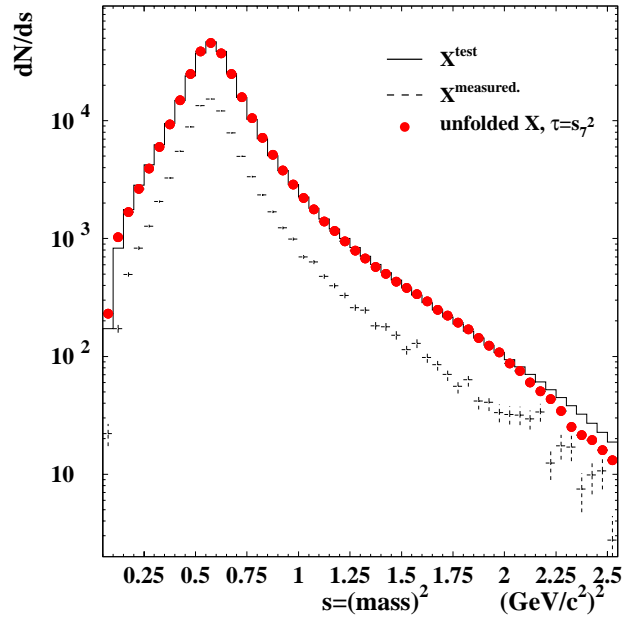


図 5.3: SVD unfolding のテストにおいて得られた分布。 実線のヒストグラムはもともとのテスト分布を、点線の分布は観測された分布を、赤の点は unfolding した結果得られた分布を示している。

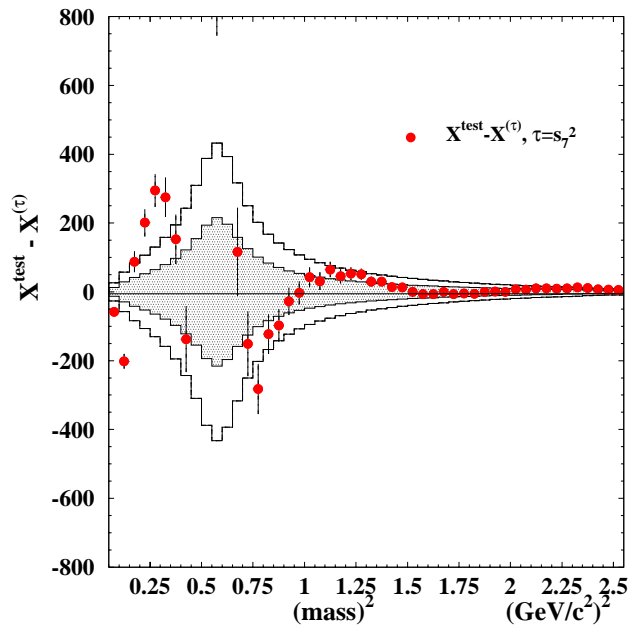


図 5.4: $X^{test} - X^{unfold}$ 図。 もともとのテスト分布から unfolding して得られた分布を bin ごとに引いた図。 赤の点が $X^{test} - X^{unfold}$ を表しており、影つきのヒストグラムは 1σ の範囲を、白のヒストグラムは 2σ の範囲を示している。

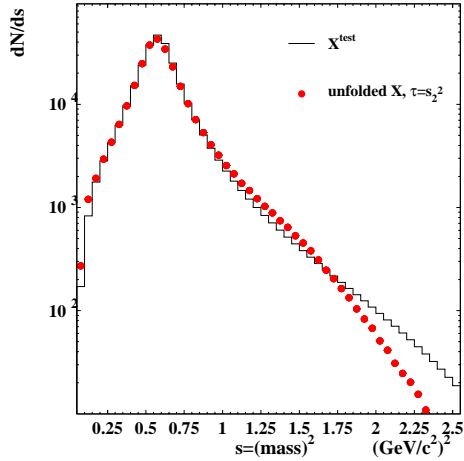


図 5.5: unfolding において cutoff 変数が小さすぎる場合の分布。この図では、rank=2 になっている。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.3 と同じである。

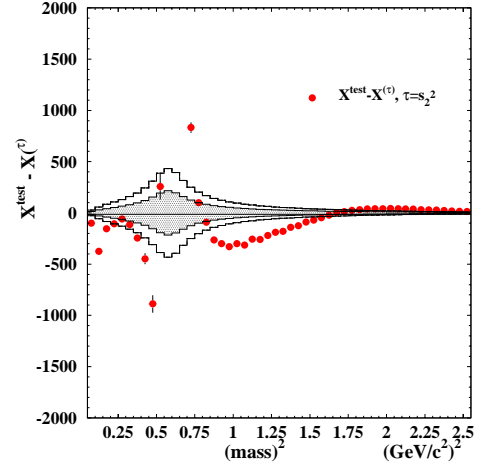


図 5.6: cutoff 変数が小さすぎる場合の $X^{test} - X^{unfold}$ 図。図 5.5 における $X^{test} - X^{unfold}$ を示している。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.4 と同じである。

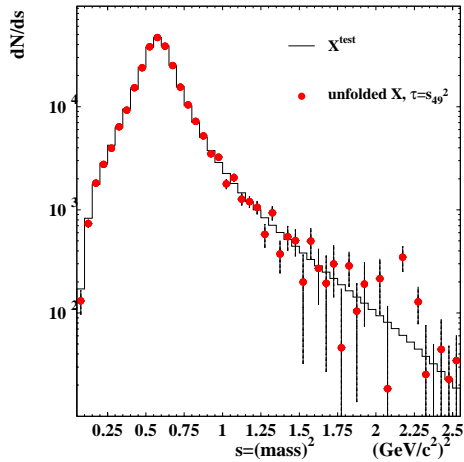


図 5.7: unfolding において cutoff 変数が大きすぎる場合の分布。この図では、rank=49 になっている。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.3 と同じである。

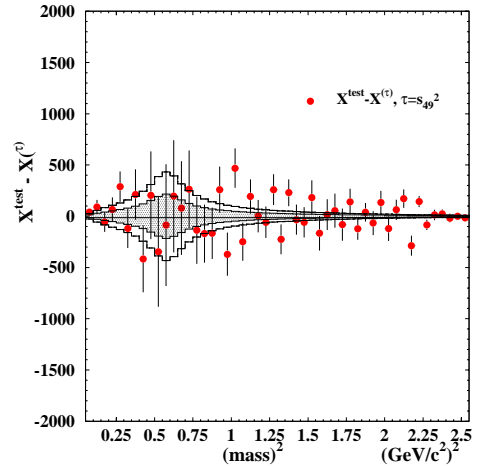


図 5.8: cutoff 変数が小さすぎる場合の $X^{test} - X^{unfold}$ 図。図 5.7 における $X^{test} - X^{unfold}$ を示している。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.4 と同じである。

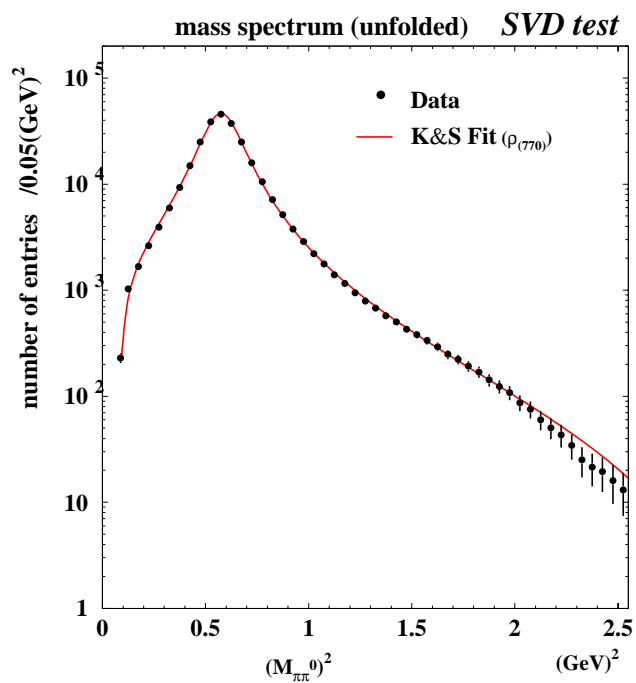


図 5.9: unfolding した分布を BW(K&S モデル) で fit した図。ヒストグラムが unfolding で得られた分布、赤の線が fit の関数である。

5.3 データを用いた $\pi\pi^0$ の不変質量分布 ($(M_{\pi\pi^0})^2$) の unfolding

この節では、前節 5.2 で確かめた unfolding プログラムを使い、実際のデータに対する unfolding を行う。

5.3.1 unfolding に使用したデータ

unfolding を行うためには、図 5.1 にもあるように、

- (1) モンテカルロから求めた response matrix
- (2) データでの $\pi\pi^0$ の質量の 2 乗分布

が必要である。

(1) モンテカルロを用いて response matrix を求める

response matrix は、「検出器の分解能などで歪められる前の分布では Bin=j であったものが、Bin=i で観測される確率」で表せる。この情報を、本解析ではモンテカルロシミュレーションを用いて得た。方法としては、モンテカルロシミュレーションを検出器のシミュレーションと実データに用いる解析プログラムに通すことで得る。つまり、 A_{ij} はモンテカルロが generate されたときの分布と検出器のシミュレーションと解析プログラムの再構成の結果得た分布との比較により得た関係と言い換えることができる。

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{A_{ij}}{X_j^{init}} \quad (5.12)$$

もし、影響するものが全くないならば、Bin=j にあったものは、Bin=j (i=j) で必ず観測されるはずである。しかし、現実には、観測される分布は必ず何らかの影響を受ける。ここで、影響を与えるものは以下の 2 つに分けられる。

- τ - pair 事象や、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選別する際に落ちてしまった事象など、その事象があったにも関わらず検出できなかった事象による寄与 (検出効率)
- 検出器で検出され、かつ $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選別をしても残っていた事象が、検出器の resolution 等の影響で、もともとの Bin とは違った Bin で検出された事からくる寄与 (検出器の分解能)

前者の「事象を検出できなかったことによる寄与」は、4 章ですでに述べた。

もう一方の「もともとの Bin とは違った Bin で検出された事による寄与」については、response と呼ばれている。これは検出器において、「Bin=j で作られ (generate) た event が、Bin=i で観測される」という関係を表したもので、これを response matrix と呼ぶ。 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布についてこの関係を図 5.10 に示した。

図 5.10 において、縦軸が generate された時の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布、横軸が観測されたときの分布である。ほとんどの事象は、「generate された Bin $j =$ 観測された Bin i 」を示す一直線上に分布しているが、少しずれたところにも事象があり、「真の分布における Bin(generate された Bin) $j \neq$ 観測された Bin(再構成された Bin) i 」となるような相関関係があることがわかる。また、この図において、事象が多いところについては精度良く決まっているものとして大きな weight をあて、事象が少ないところについては weight を小さくして unfolding が行われる。

次に、全体のアクセプタンスを考えてみる。アクセプタンスは

$$\eta_j = \sum_i \frac{A_{ij}}{X_j^{init}} \quad (5.13)$$

で表される。 \sum_j は観測された分布について足しあげを示している。これを質量の範囲ごとに見てみると、図 5.11 のようになる。また、「generate された時の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布」 X_j^{init} 分布は図 5.12 に示した。

response matrix は図 5.10 を質量の範囲で区切った時、その Bin に入った事象数に対し、図 5.12 の Bin ごとの事象数で割ったもので得られる。

response matrix を求める上で Bin の幅を決めることは、response matrix の形に直接関係することから大変重要なことである。今回は、Bin の幅として $0.05(\text{GeV})^2$ を用いた⁴。

(2) データにおける $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布

データにおける $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を図 5.13 に示した。 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布については、図 A.1,4.18 でも示したが、図 5.13 では unfolding するため Bin の幅が response matrix を決めたときと同様の $0.05(\text{GeV})^2$ を用いている⁵。unfolding に用いるデータとしては、図 5.13 のデータの値から、モンテカルロで見積もったバックグラウンド ($non - \tau$ バックグラウンドと feed across バックグラウンドを足したもの) を引いた分布を用いている。

$$N_{signal} = N_{total} - N_{B.G.} \quad (5.14)$$

ここで、このデータに対する統計誤差は、

$$\sigma_{signal} = \sigma_{total} \quad (5.15)$$

とした。

これらを用いて、unfolding を実行した。

⁴これは、検出器の分解能を $0.005 \sim 0.03(\text{GeV})^2$ と見積もったためである。

⁵図 A.1,4.18 では、Bin 幅がこの $1/2$ 、つまり $0.025(\text{GeV})^2$ になっている。

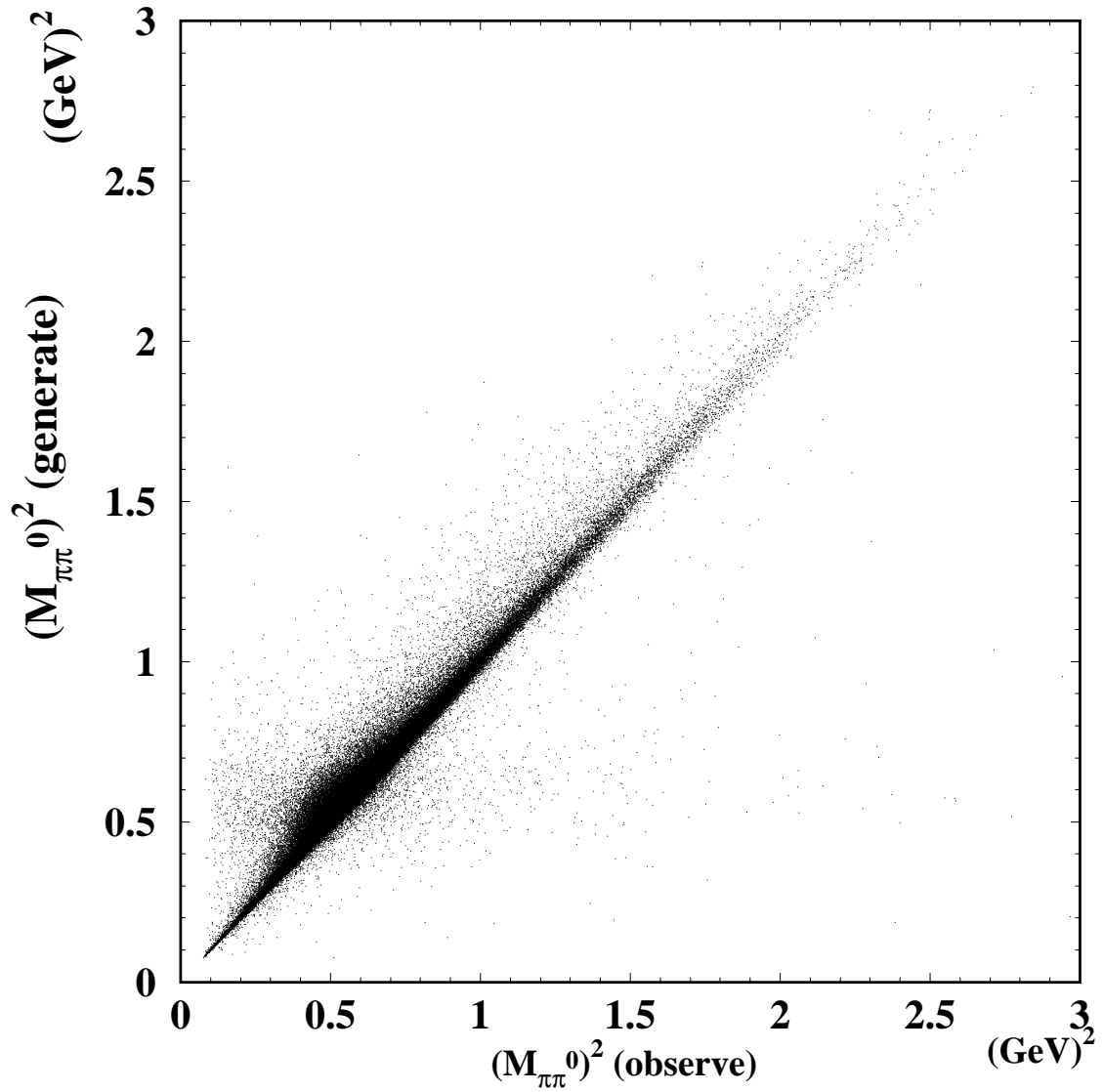


図 5.10: $(M_{\pi\pi^0})^2|_{generate}$.VS. $(M_{\pi\pi^0})^2|_{observed}$ plot. $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu$ 崩壊のモンテカルコを使い、縦軸に generate された時の $\pi\pi^0$ の質量の 2 乗分布を、横軸にはそれが観測されたときの分布をとり、これら 2 つの分布の相関関係を 2 次元 plot で表した図。

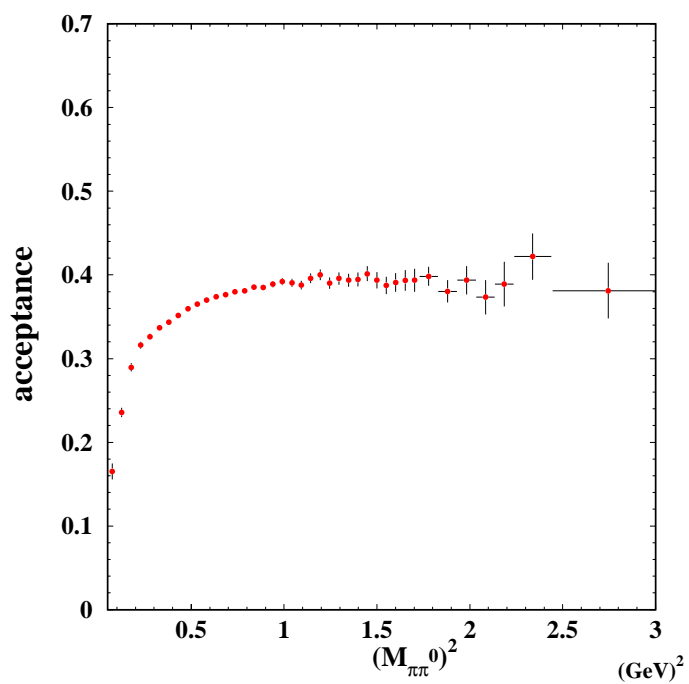


図 5.11: モンテカルロで見積もった $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲ごとアクセプタンス。縦軸にアクセプタンス (η_j) を、横軸には $(M_{\pi\pi^0})^2$ をとった図。

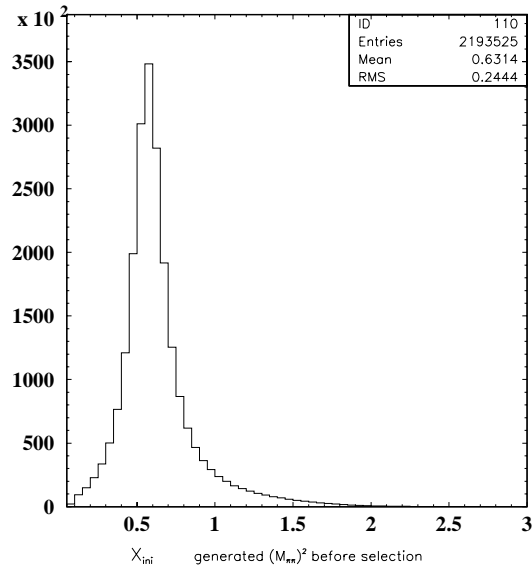


図 5.12: (X_{ini}) 分布。この分布はモンテカルロで generate されたときの $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布であり、ここには、事象選別による寄与や検出器による寄与は含まれていない。

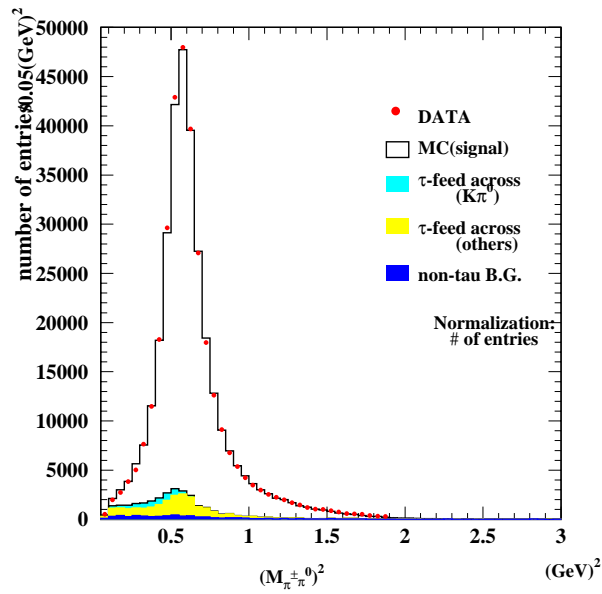


図 5.13: $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 (Bin 幅は $0.05(\text{GeV})^2$)。図中の点やヒストグラムの意味は図 4.18 と同じである。

5.3.2 Breit-Wigner 関数の定義

2章でもふれたように、スペクトラル関数 ($v^{\pi\pi}(s)$) やパイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$) には、 $\rho(770)$ 中間子や $\rho(770)$ の励起状態である $\rho(1450)$ 、 $\rho(1700)$ 中間子の質量分布の形が大きく寄与する。

ρ 中間子の不変質量分布を表すものとして、「Breit-Wigner (BW)」による記述が知られている。さまざまな「Breit-Wigner (BW)」による記述の中から、本論文では *Kühn and Santamaria* モデル(K&S モデル)と、*Gounaris and Sakurai* モデル(G&S モデル)の2つについて考えることとし、これを用いて $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の fit を行う。

1: Kühn and Santamaria モデル (K&S モデル)

K&S モデルは比較的単純な形で表せることに加え、*CLEO II* で開発されたモンテカルロシミュレーション TAUOLA の中で τ の崩壊を記述する関数として用いられているため、fitng 関数として効果的である。

この場合、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 ($\frac{dN}{ds}$) は以下のように表される。

$$\frac{dN}{ds} = A \times \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) v^{\pi\pi^0}(s) \quad (5.16)$$

ここで、2章でも述べたようにスペクトラル関数 ($v^{\pi\pi^0}(s)$) はパイオンの構造因子 ($F_\pi(s)$) を用いて以下のように表すことができる。

$$v^{\pi\pi^0}(s) = \frac{1}{12} |F_\pi(s)|^2 \beta_\pi^3 \quad (5.17)$$

また、パイオンの構造因子 ($F_\pi(s)$) は Breit-Wigner 関数を用いて

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} (BW_\rho + \beta BW_{\rho'} + \gamma BW_{\rho''}) \quad (5.18)$$

と表すことができる。ここには、 $\rho(770)$ (式 5.18 において ρ に対応する)、 $\rho(1450)$ (ρ')、 $\rho(1700)$ (ρ'') が考慮されている⁶。

Kühn and Santamaria モデルにおいて、Breit-Wigner 関数は以下のように定義される。

$$BW_\rho^{KS} = \frac{1}{(M_\rho^2 - s) - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)} \quad (5.19)$$

⁶これに、 $\rho - \omega$ 干渉を考慮に入れると、

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} \left(BW_\rho \frac{1 + \delta BW_{\omega(783)}}{1 + \delta} + \beta BW_{\rho'} + \gamma BW_{\rho''} \right)$$

となるが、 $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-$ 反応はアイソスピン保存より、 e^+e^- 対消滅でしか起らない。よって、今回のように τ のデータを扱うときは $\rho - \omega$ 干渉を考慮しなくてもよい ($\delta = 0$)

ここで、 BW_ρ^{KS} の中で使われている要素は以下のようになっている。

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho \left(\frac{M_\rho^2}{s} \right)^{\lambda=1} \left(\frac{k(s)}{k(M_\rho^2)} \right)^3 \quad (5.20)$$

$$k(s) = \frac{1}{2} \sqrt{s} \beta_\pi(s) \quad (5.21)$$

$$\beta_\pi(s) = \sqrt{\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2}{s} \right) \left(1 - \frac{(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2}{s} \right)} \quad (5.22)$$

以上の式 (5.16~5.22) の中で使用した要素は以下の通りである。

- A : 規格化定数
- s : $(M_{\pi\pi^0})^2$
- $\frac{dN}{ds}$: $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布
- M_τ : τ の質量
- M_ρ : ρ の質量
- Γ_ρ : ρ の幅
- m_π : π の質量
- $k(s)$: $\pi\pi^0$ 静止系での運動量

2: Gounaris and Sakurai モデル (G&S モデル)

Gounaris and Sakurai モデルは、 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ の散乱断面積を記述するために、用いられてきた。より広い領域の共鳴状態に対する散乱振幅を精密に取り扱うのに有効であるという特徴がある。

Gounaris and Sakurai モデルにおいても、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 ($\frac{dN}{ds}$) は K & S モデルと同様、式 5.16 で表される。また、スペクトラル関数、パイオンの構造因子 ($F_\pi(s)$) に関しても K&S モデルと同じ形式であり、式 5.17, 5.18 で書き表せる。しかしながら、Breit-Wigner 関数の形が違い、

$$BW_\rho^{GS} = \frac{M_\rho^2 (1 + d \cdot \Gamma_\rho(s))}{(M_\rho^2 - s) + f(s) - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)} \quad (5.23)$$

となる。G&S モデルの Breit-Wigner 関数には、K&S モデルに加え、分子に $M_\rho(d \frac{\Gamma_\rho}{M_\rho})$ 、分母に $f(s)$ が付け足されていることが特徴である。ここで、 $f(s), h(s)$ は

$$f(s) = \Gamma_\rho \frac{M_\rho^2}{k^3(M_\rho^2)} \left[k^2(s) (h(s) - h(M_\rho^2)) + (M_\rho^2 - s) k^2(M_\rho^2) \frac{dh}{ds} \Big|_{s=M_\rho^2} \right] \quad (5.24)$$

$$h(s) = \frac{2k(s)}{\pi\sqrt{s}} \ln \frac{\sqrt{s} + 2k(s)}{2m_\pi} \quad (5.25)$$

$$\left. \frac{dh}{ds} \right|_{M_\rho^2} = h(M_\rho^2) \left[(8k^2(M_\rho^2))^{-1} - (2M_\rho^2)^{-1} \right] + (2\pi M_\rho^2)^{-1} \quad (5.26)$$

で表される。そして、 d は、 $F_\pi(0) = 1$ 、つまり $BW_\rho^{GS}(0) = 1$ を満たすように規格化することが要求されており、

$$\begin{aligned} d &= \frac{f(0)}{\Gamma_\rho M_\rho} \\ &= \frac{3}{\pi} \frac{m_\pi^2}{k^2(M_\rho^2)} \ln \frac{M_\rho + 2k(M_\rho^2)}{2m_\pi} + \frac{M_\rho}{2\pi k(M_\rho^2)} - \frac{m_\pi^2 M_\rho}{\pi k^3(M_\rho^2)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

と決められる。

パイオンの構造因子に対する K&S モデルと、G&S モデルでの相違点を考えると、この2つの Breit-Wigner モデルには

- (1) どちらも $F_\pi(0) = 1$ になるように規格化されている。
- (2) どちらのモデルも、 ρ のピーク付近においては同じような形をとる。

といった一致点があげられる。しかしながら、同じ M_ρ 、 Γ_ρ を値として用いた場合、 $s = M_\rho^2$ において G&S モデルのパイオン構造因子 F_π の値は K&S モデルの値よりも大きくなる傾向が見られる。

また、K&S モデルと、G&S モデルの両方で用いられている定数 β, γ は、それぞれ ρ', ρ'' が支配的な共鳴状態である ρ に対してどれぐらいの割合なのかを示す値である。これまで書いた式においては、これらの値を実数として扱っていたが、実際には複素数であることが知られている⁷。

複素数としてこれらを取り扱うには、複素成分を表す係数として ϕ を導入し

$$\beta \rightarrow \beta \cdot e^{i\phi}$$

と置き換えることで行う。 ρ'' に対する値 γ についても同様にして複素数として取り扱うことができる。

⁷ ρ, ρ', ρ'' 間の位相差を考慮すると一般的には複素数で記述される

5.3.3 unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布と Breit-Wigner による fit

小節 5.3.1 で述べたデータを unfolding プログラムの入力として unfolding を実行した結果、図 5.14 にもあるように、rank は 8 となり、これを cutoff 変数として用いて結果を得た。ただし、unfolding に用いたのは以下の範囲に入ったデータのみである。

$$threshold \leq (M_{\pi\pi^0})^2 \leq 2.55(\text{GeV})^2 \quad (5.28)$$

ここで、 $threshold$ は、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ がとり得る最小値であり、本解析に用いた $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の場合 π^\pm と π^0 の質量を合わせた値より $threshold = (M_{\pi^\pm} + M_{\pi^0})^2 = (0.140 + 0.135)^2 \simeq 0.076(\text{GeV})^2$ となる。また、最大値は τ の質量となり $(M_{\pi\pi^0})^2_{max} = M_\tau^2 = (1.777)^2 \simeq 3.16(\text{GeV})^2$ となるが、図 4.18 を見ても明らかなように $(M_{\pi\pi^0})^2 \geq 2.55(\text{GeV})^2$ の範囲のデータは統計量が少ない上にバックグラウンドも多いことから、この範囲のデータは使用しないこととした。

unfolding した結果得られた分布に対して、前節で記述した 2 つの Breit-Wigner (K&S モデル, G&S モデル) を用いて fit したものが図 5.15 と図 5.16 である。また、この fit で得られた結果を表 5.3.3 に示した。fitting に用いた $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲は unfolding したときと同様に式 5.28 の範囲である。よって、本解析の fitting には $\rho(1700)$ 共鳴状態は考慮しないものとし、 $\rho(1700)$ に対する定数である γ はゼロに固定した⁸。

一方、 $\rho(1450)$ 共鳴状態は考慮し、これに対する定数 β は

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \beta \text{ を実数として扱う} \\ \quad \text{パイオン構造因子: } F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta}(BW_\rho + \beta BW_{\rho'}) \\ \cdot \beta \text{ を } \beta e^{i\phi} \text{ と置き換えることで複素数として扱う} \\ \quad \text{パイオン構造因子: } F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta e^{i\phi}}(BW_\rho + \beta e^{i\phi} BW_{\rho'}) \end{array} \right.$$

の 2 つの場合を用いた。

これらの図と表から以下のことが言える。

- ρ だけを考慮して fit した時よりも $\rho + \rho'$ として fit した時の方が、明らかに分布を再現できる。ここからも $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の中には、 $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau$ 崩壊だけでなく $\tau \rightarrow \rho'\nu_\tau$ も含まれているという事が確かめられた。
- 得られた値は 2 つの Breit-Wigner モデルの間で誤差の範囲で一致している。
- $\rho + \rho'$ として fit した時、 β を実数として扱った場合と複素数成分 ϕ を入れて fit した場合は、 $\phi \sim 180^\circ$ となり、一致した結果を示している。

さらに、以前に行われた他の実験結果との比較を表 5.3.3 で行った。他の実験においては、いずれも β を実数として扱っており、複素数成分は扱っていない。

⁸ $\rho(1700) : (1.7\text{GeV})^2 = 2.89(\text{GeV})^2$

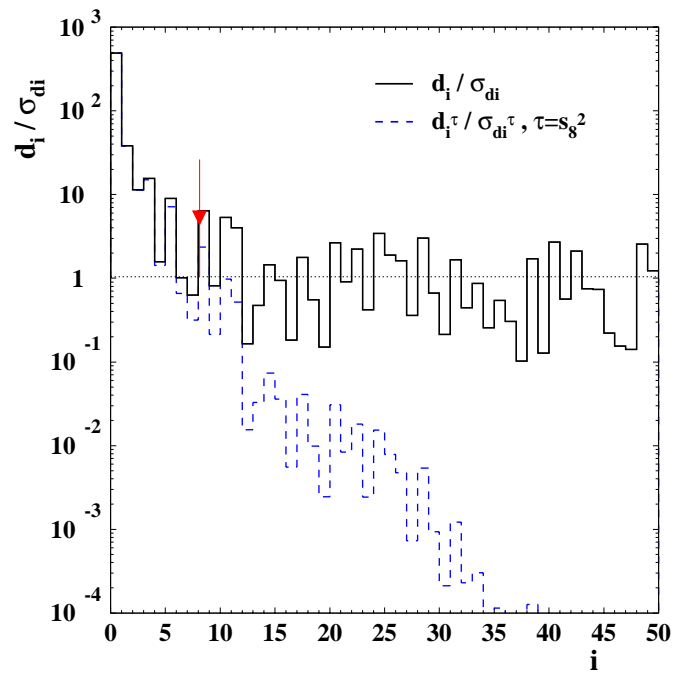


図 5.14: $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 図。横軸に i 、縦軸に $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ をとった図。図中の矢印は「rank」を示しており、今の場合 rank=8 となっている。ヒストグラムは実際の $\log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 分布であり、点線のヒストグラムは rank を考慮した場合の分布である。

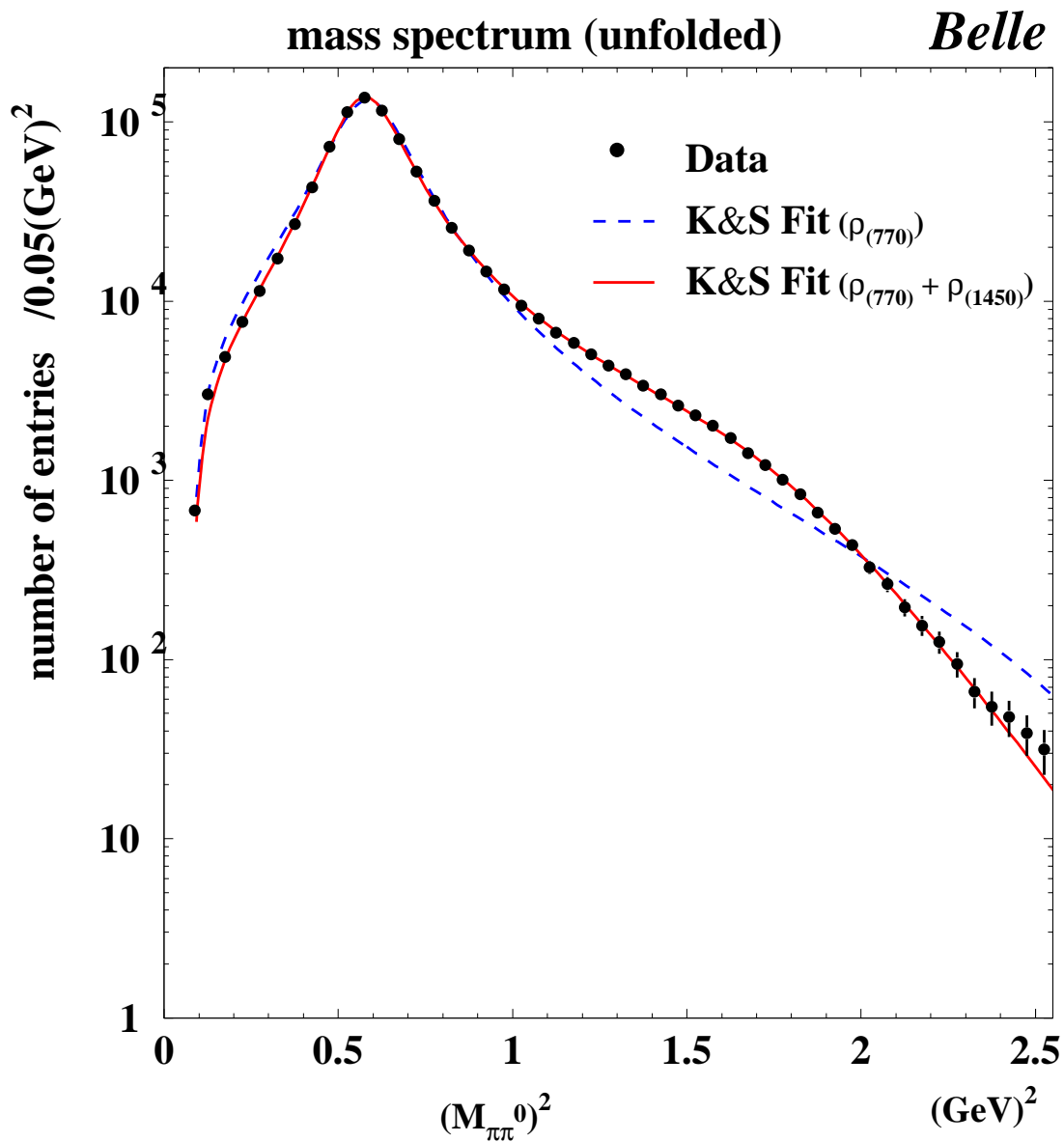


図 5.15: unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を K&S モデルで fit した図。点がデータ、青の点線が $\rho(770)$ のみを考慮した場合、赤の線が $\rho(770) + \rho'(1450)$ を考慮した場合の fit をそれぞれ示している。

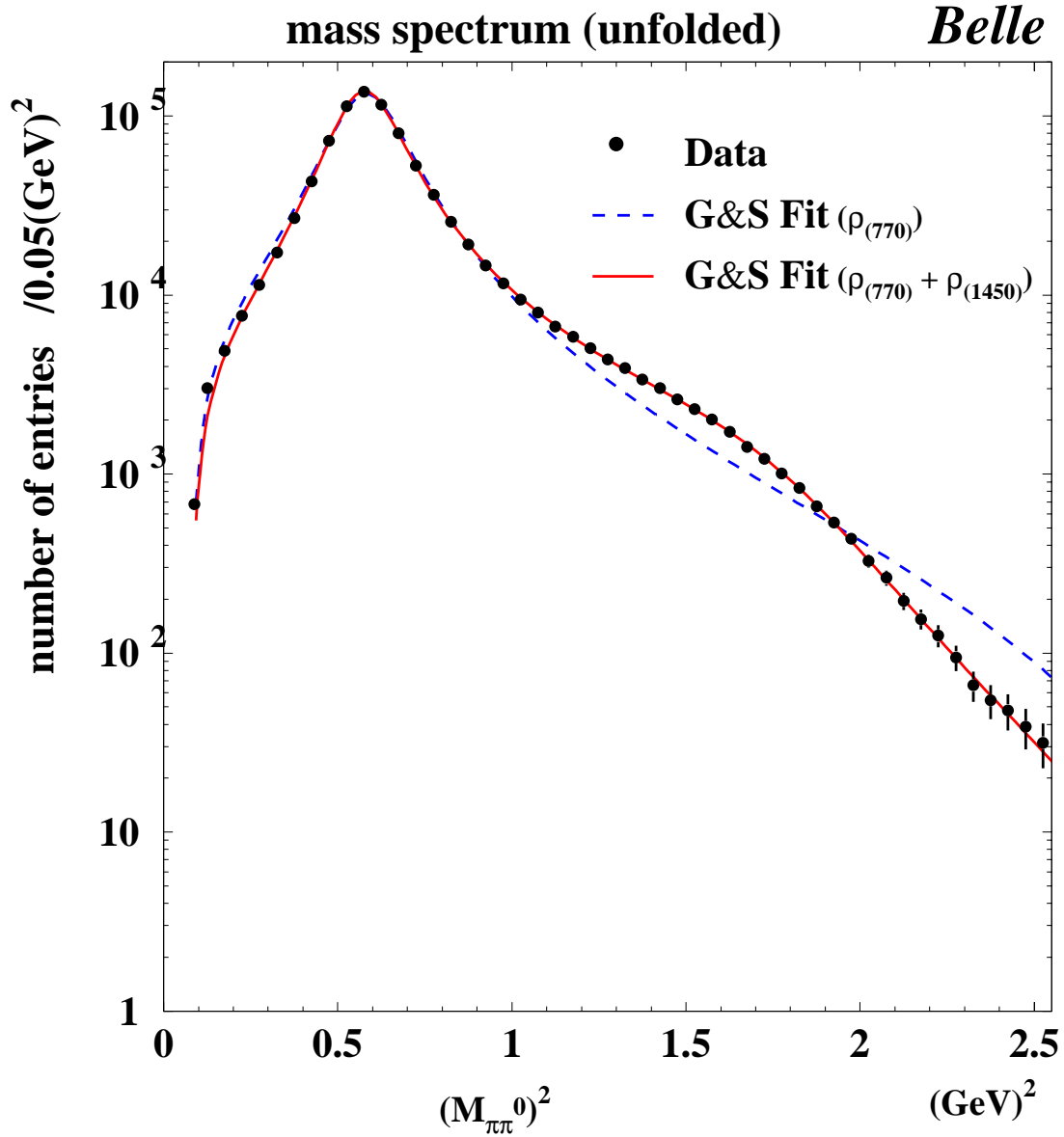


図 5.16: unfoldingの結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を G&S モデルで fit した図。図 5.15 と同じく、点がデータ、青の点線が $\rho(770)$ のみの場合、赤の線が $\rho(770) + \rho'(1450)$ の場合をそれぞれ示している。

表 5.2: unfolding で得られた質量分布を fit した結果

Fit 変数	Kühn and Santamaria モデル			Gounaris and Sakurai モデル		
	ρ only	$\rho + \rho'$ (β is real)	$\rho + \rho'$ (β, ϕ used)	ρ only	$\rho + \rho'$ (β is real)	$\rho + \rho'$ (β, ϕ used)
M_ρ (MeV)	784.1 \pm 0.2	774.4 \pm 0.4	774.3 \pm 0.4	782.7 \pm 0.2	775.0 \pm 0.3	775.1 \pm 0.4
Γ_ρ (MeV)	164.7 \pm 0.6	151.2 \pm 0.7	151.3 \pm 0.7	165.1 \pm 0.6	153.0 \pm 0.7	153.0 \pm 0.7
$M_{\rho'}$ (MeV)		1396 \pm 6	1410 \pm 19		1399 \pm 6	1393 \pm 17
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)		476 \pm 24	489 \pm 30		429 \pm 24	422 \pm 29
β		-0.132 \pm 0.005	0.143 \pm 0.018		-0.097 \pm 0.004	0.094 \pm 0.009
ϕ		\equiv 180.0 (fixed)	186.3 \pm 8.7		\equiv 180.0 (fixed)	177.6 \pm 6.1
$\chi^2/d.o.f$	2114/46= 46.0	34.5/43= 0.80	33.8/42= 0.81	1447/46= 31.7	31.3/43= 0.73	31.2/42= 0.74

5.4 スペクトラル関数とパイオンの構造因子 分布

この節では、前節までで得た unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布からスペクトラル関数分布とパイオンの構造因子分布を求める。

5.4.1 スペクトラル関数 ($v^{\pi\pi}(s)$)

スペクトラル関数は、2章でも述べたように、unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を用いて以下のように表すことができる。

$$v^{\pi\pi}(s) = \frac{M_\tau^2}{6|V_{ud}|^2 S_{EW}} \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right)} \frac{B_{\pi\pi^0}}{B_e} \frac{1}{N_{\pi\pi^0}} \frac{dN_{\pi\pi^0}}{ds} \quad (5.29)$$

ここで、 $dN_{\pi\pi^0}$ が unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布であり、 ds が bin の幅 ($0.05(GeV)^2$)、 $N_{\pi\pi^0}$ が unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布におけるデータ数の総和である。また、 M_τ 、 S_{EW} 、 $|V_{ud}|$ 、 B_e 、 $B_{\pi\pi^0}$ については、用いた値を表 5.4 にまとめた。

これらを用いて求めたスペクトラル関数分布を図 5.17 に示した。ここで、同じ図上に plot したのは、CLEO 実験の値 [10]⁹ であり、ここでも、2つの実験の結果はよく合っていることがわかる。

⁹ただし、もともとの値は横軸に $M_{\pi\pi^0}$ をとった形となっていたので、 $(M_{\pi\pi^0})^2$ に直し、我々の実験と比較できるようにした。

表 5.3: fit で得られた結果について他の実験との比較

<i>Fitting</i> の変数	<i>Belle</i>	<i>CLEO</i>	<i>ALEPH</i>
<i>Kühn and Santamaria</i> モデル			
M_ρ (MeV)	774.3 \pm 0.4	774.9 \pm 0.5	774.9 \pm 0.9
Γ_ρ (MeV)	151.3 \pm 0.7	149.0 \pm 1.1	144.2 \pm 1.5
$M_{\rho'}$ (MeV)	1410 \pm 19	1364 \pm 7	1363 \pm 15
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)	489 \pm 30	400 \pm 26	\equiv 310 (fixed)
$ \beta $	0.143 \pm 0.018	-0.108 \pm 0.007	-0.094 \pm 0.007
ϕ	186.3 \pm 8.7	\equiv 180.0 (fixed)	\equiv 180.0 (fixed)
$\chi^2/d.o.f$	33.8 / 42	27.0 / 24	81 / 65
<i>Gounaris and Sakurai</i> モデル			
M_ρ (MeV)	775.1 \pm 0.4	775.3 \pm 0.5	776.4 \pm 0.9
Γ_ρ (MeV)	153.0 \pm 0.7	150.5 \pm 1.1	150.5 \pm 1.6
$M_{\rho'}$ (MeV)	1393 \pm 17	1365 \pm 7	1400 \pm 16
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)	422 \pm 30	356 \pm 26	\equiv 310 (fixed)
$ \beta $	0.094 \pm 0.009	-0.084 \pm 0.006	-0.077 \pm 0.008
ϕ	177.6 \pm 6.1	\equiv 180.0 (fixed)	\equiv 180.0 (fixed)
$\chi^2/d.o.f$	31.2 / 43	26.8 / 24	54 / 65
fit-spectrum	$M_{\pi\pi^0}^2$	$M_{\pi\pi^0}$	$M_{\pi\pi^0}^2$
comment			$\rho''(1700)$ is included

表 5.4: スペクトラル関数の中で使われる値

定数	使用した値	参照
M_τ : τ の質量	1.77703 GeV	PDG
S_{EW} : 電弱相互作用に対する補正	1.0194	[6]
$ V_{ud} $: CKM 行列の成分	0.9752	PDG
B_e : $\tau \rightarrow e\nu_e\nu_\tau$ の崩壊分岐比	0.1783	PDG
$B_{\pi\pi^0}$: $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比	0.2541	[16]

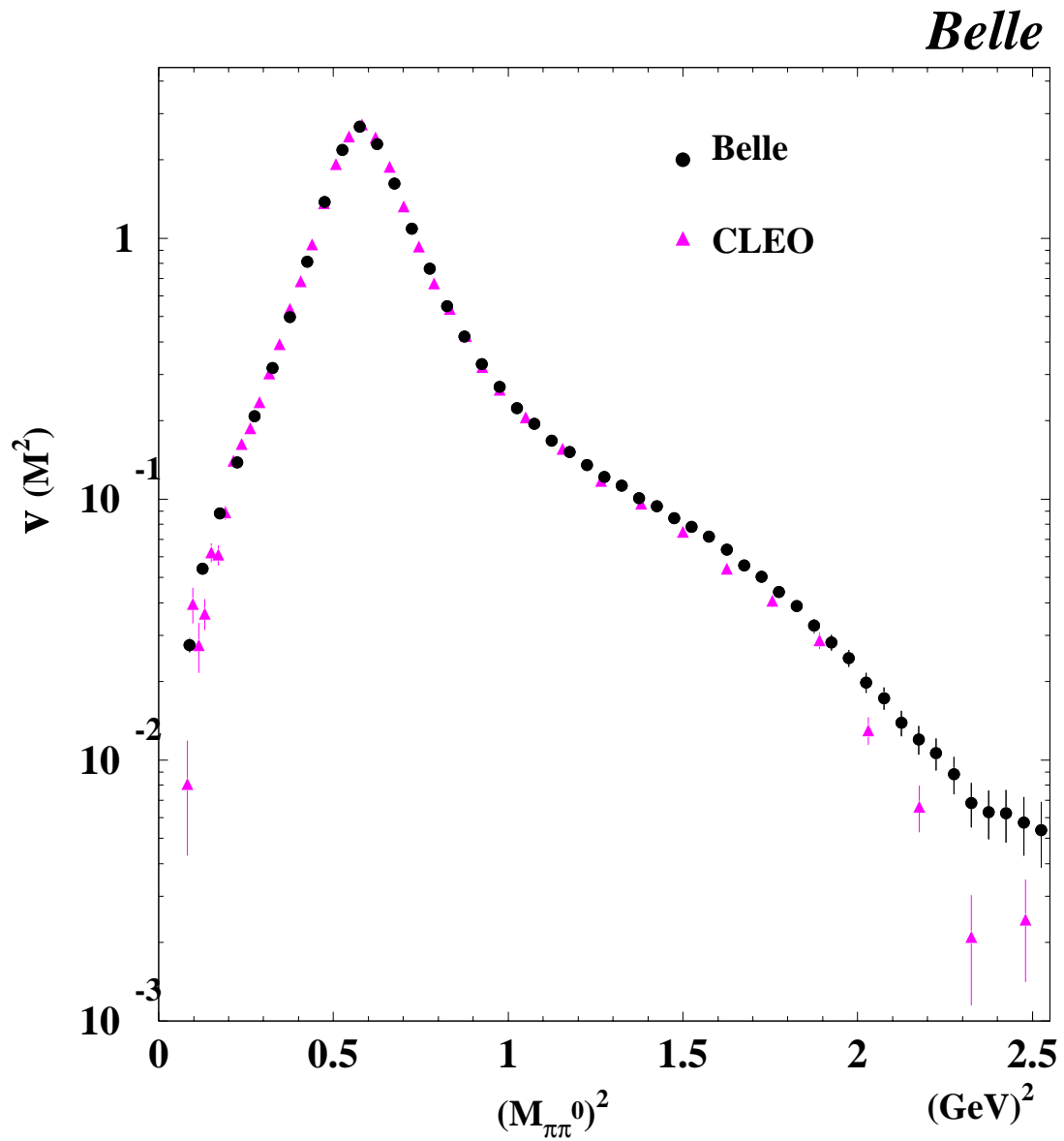


図 5.17: スペクトラル関数 $(v^{\pi\pi}(s))$ 分布。 黒の丸は Belle のデータを、ピンク色の三角は CLEO のデータをそれぞれ示す。

5.4.2 パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$)

次に、パイオンの構造因子分布をを求める。パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$) はペクトラル関数 ($v^{\pi\pi}(s)$) を用い以下のように表すことができ、これは π 粒子の電磁気的な項を示している。また、 β_π は $\pi\pi$ の静止系における運動量の情報を含んだ要素である。このようにして求めたパイオンの構造因子分布を図 5.18 に示した。このパイオンの構造因子もまた、スペクトラル関数と並んでハドロン系の状態を記述するのに特徴的な要素である。

$$|F_\pi|^2 = \frac{12}{\beta_\pi^2} v^{\pi\pi^0}(s) \quad (5.30)$$

$$\beta_\pi(M) = \sqrt{\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2}{M^2}\right) \left(1 - \frac{(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2}{M^2}\right)} \quad (5.31)$$

5.5 ミューオンの異常磁気モーメントのハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{had,LO}$)

2章でも述べたように、ミューオンの異常磁気モーメントの中で、一番不定性の多い項はハドロンの真空偏極に関する項 (a_μ^{had}) である。

$$a_\mu^{had} = a_\mu^{had,LO} + a_\mu^{had,HO} + a_\mu^{had,LBL}$$

この中で τ のデータを用いて得られるのは、比較的低エネルギーの低い ($a_\mu^{had,LO}$) 項であり、中でも本解析で用いた $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ のデータを用いて求められるのは $\pi\pi$ 系からの寄与 ($a_\mu^{\pi\pi}$)¹⁰ である。これが以下のように表されることも2章で述べた。

$$a_\mu^{\pi\pi} = \frac{\alpha_{em}^2(0)}{\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{v^{\pi\pi}(s)}{s} K(s) ds \quad (5.32)$$

ここで、スペクトラル関数は式 5.29 の通りである。

今回は、積分を「Binごとの entry 数を足し上げる」という形で実行した。

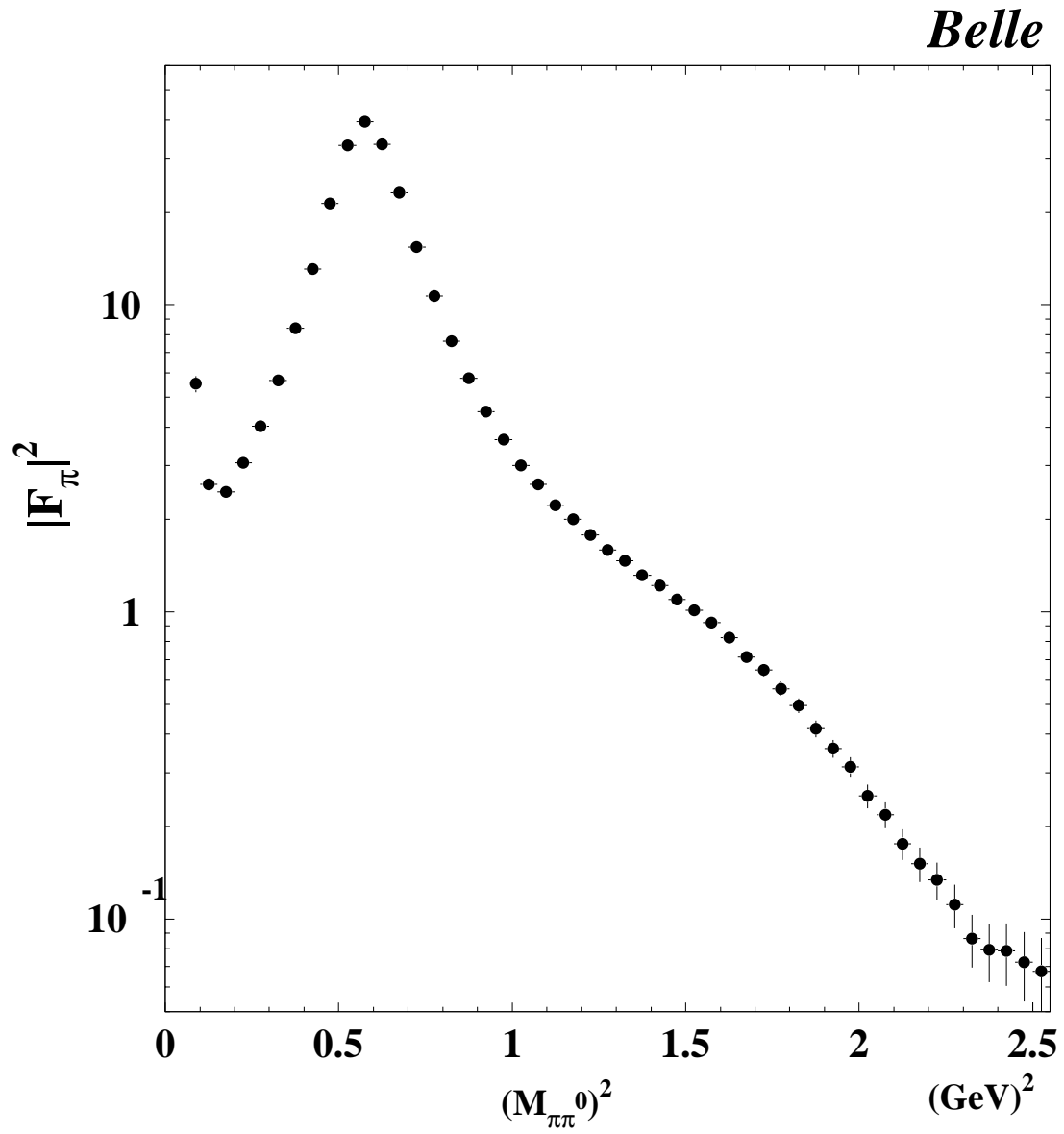
$$a_\mu^{\pi\pi^0} = \sum_i f_i n_i^{\pi\pi} \Delta s_i \quad (5.33)$$

ここで、 f_i は式 5.32 において定義した i 番目の Bin にかかる係数、 $n_i^{\pi\pi}$ は i 番目の Bin の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の entry 数、 Δs_i は Bin 幅である。

統計誤差については、error matrix ($E_{i,j}$) を考慮して

$$\Delta a_\mu^{\pi\pi^0} = \sum_{i,j} \left(\frac{da_\mu}{dn_i} \right) \left(\frac{da_\mu}{dn_j} \right) E_{i,j} \quad (5.34)$$

¹⁰2.2 節でも述べたように、これは終状態に π が 2 つあるような場合の寄与である。

図 5.18: パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$) 分布

とした。error matrix については、付録 C で図 C.2 に示した。この計算で用いたスペクトラル関数に含まれる係数は表 5.4 に示したものと同一である。

この計算の結果、以下の値を得た。

$$a_{\mu}^{\pi\pi^0} = (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \quad (5.35)$$

ALEPH、CLEO の実験のデータを合わせて出した結果 [6] と比較してみると

$$a_{\mu}^{\pi\pi} = \begin{cases} \text{ALEPH+CLEO } [2m_{\pi} \leq M_{\pi\pi} < 1.80(GeV)] : & (527.73 \pm 3.38(stat) \pm 2.61(sys)) \times 10^{-10} \\ \text{Belle } [(m_{\pi} + m_{\pi^0})^2 \leq M_{\pi\pi}^2 < 2.55(GeV)^2] : & (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \end{cases} \quad (5.36)$$

となり、他の実験と誤差の範囲で一致していることがわかった。式中の [] の中は積分範囲を表している。

ただし、ここで示した $a_{\mu}^{\pi\pi^0}$ には、アイソスピンを破ることによる補正はしていない。

第6章 結果と考察

KEKB 加速器において、Belle 実験が収集したデータを用いて、 $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊における $\pi\pi^0$ 系のスペクトラル関数の測定を行った。使用したデータは、Belle 実験で 2000 年 10 月から 2000 年 12 月までに収集された 4.44 /fb のデータであり、事象選別の結果、約 32 万個の $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を得た。

スペクトラル関数を求める前段階として、SVD unfolding 法を用いて $\pi\pi^0$ の不変質量分布求め、得られた分布に対して、Kühn & Santamaria モデルと Gounaris & Sakurai モデルの 2 つの Breit-Wigner 関数で fit をした。結果以下のことが観測された。

- ρ の要素に関しては、他の実験と非常によく一致している。

$$K\&S \begin{cases} M_\rho = 774.3 \pm 0.4 \text{ (MeV)} \\ \Gamma_\rho = 151.2 \pm 0.7 \text{ (MeV)} \end{cases} \quad G\&S \begin{cases} M_\rho = 775.1 \pm 0.4 \text{ (MeV)} \\ \Gamma_\rho = 153.0 \pm 0.7 \text{ (MeV)} \end{cases} \quad (6.1)$$

- ρ' の要素に関しては、他の実験との間に多少違いがみられる。

$$K\&S \begin{cases} M_\rho = 1410 \pm 19 \text{ (MeV)} \\ \Gamma_\rho = 489 \pm 30 \text{ (MeV)} \\ |\beta| = 0.143 \pm 0.018 \\ \phi = 186.3 \pm 8.7 \end{cases} \quad G\&S \begin{cases} M_\rho = 1393 \pm 17 \text{ (MeV)} \\ \Gamma_\rho = 422 \pm 29 \text{ (MeV)} \\ \beta = 0.094 \pm 0.009 \\ \phi = 177.6 \pm 6.1 \end{cases} \quad (6.2)$$

さらに、スペクトラル関数を得、これを積分することでミュオンの異常磁気モーメントの低いエネルギー領域におけるハドロンの真空偏極項のうち、終状態に π 粒子を 2 つ含む崩壊からの寄与 $a_\mu^{\pi\pi}$ を得た。

$$a_\mu^{\pi\pi} = (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \quad (6.3)$$

この値は、現在報告されている中で最も精度の高い値と誤差の範囲内で一致している。このことから、ハドロンの真空偏極項 $a_\mu^{\pi\pi}$ を得る過程で、検出器の性能を理解し、また、検出する際考慮すべき補正など基本的な振る舞いを精度よく理解できたといえる。しかしながら、この値に含まれる誤差は統計誤差のみである。さらに精密な測定のためにも、系統誤差の見積もりをすることが今後の課題となる。

また、今回本解析に用いたデータは、今現在 Belle 実験が持つデータの 1/20 ほどであり、高い統計のデータを用いる事でさらなる精度の向上が望まれる。

付録A 解析における補足

解析の補足として、本文中では用いなかった図や細部についてふれる。

A.1 事象選別に関する補足

(1) モンテカルロに用いた m_ρ の値について

4.3.3 節において、実験データとモンテカルロを比較する際、モンテカルロの値として表 4.3.3 にある値を使用した。この裏付けとして、 m_ρ の値に「 $m_\rho = 766.5 \text{ MeV}$ を使った場合の $(\pi^-\pi^0)^2$ 分布」を図 A.1 に、「 $m_\rho = 775.3 \text{ MeV}$ を使った場合の $(\pi^-\pi^0)^2$ 分布」を図 A.3 に示した。また、図 A.1 と図 A.1 は図 A.1, 図 A.3 に対する $R = \frac{\text{Data}}{\text{MC}} - 1$ plot である。これらを見比べてみると、 $m_\rho = 769.3 \text{ MeV}$ を用いた方にはわずかであるが peak shift が見られる。一方、 $m_\rho = 775.3 \text{ MeV}$ を用いた方では、データとモンテカルロがよく合っていることが確かめられた。

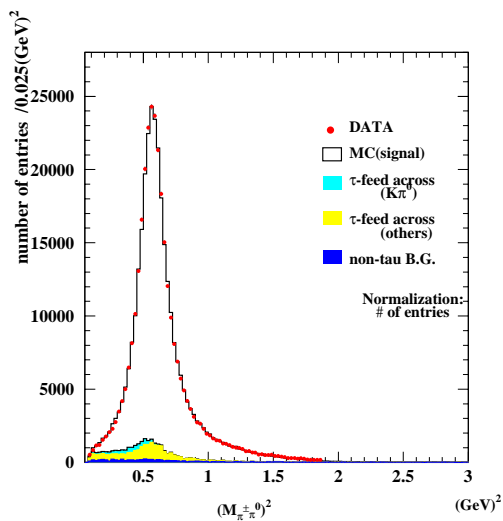


図 A.1: MCにおいて $m_\rho = 775.3 \text{ MeV}$ を用いた場合の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布。 ($m_\rho = 775.3 \text{ MeV}$ は τ, e^+e^- 実験における ρ 中間子の質量。) 図中の点やヒストグラムの意味は図 4.18 と同じである。

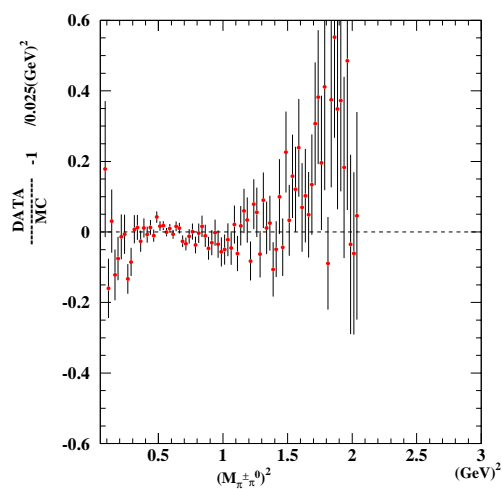


図 A.2: $(M_{\pi\pi^0})^2$ の $\frac{\text{DATA}}{\text{MC}} - 1$ plot。(MCにおいて $m_\rho = 775.3 \text{ MeV}$ を用いた場合)

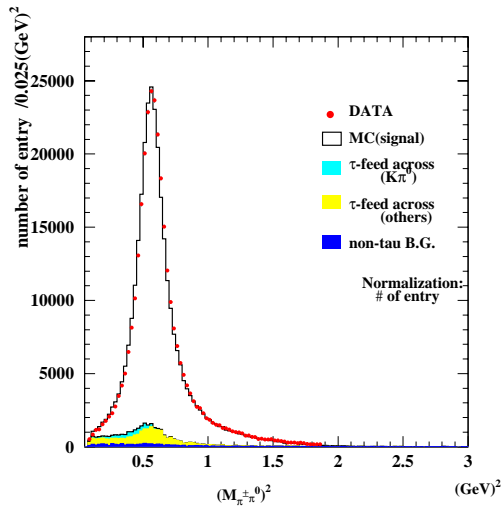


図 A.3: MCにおいて $m_\rho = 769.3 \text{ MeV}$ を用いた場合の $(M_{\pi^+\pi^0})^2$ 分布。 ($m_\rho = 769.3 \text{ MeV}$ は PDG における ρ 中間子の質量。) 図中の点やヒストグラムの意味は図 4.18 と同じである。

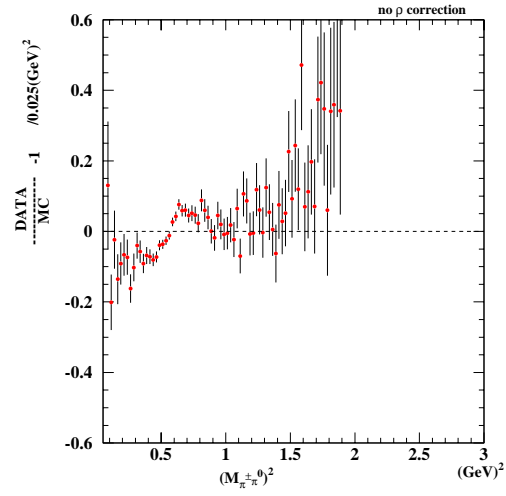


図 A.4: $(M_{\pi^+\pi^0})^2$ の $\frac{DATA}{MC} - 1$ plot。 (MCにおいて $m_\rho = 769.3 \text{ MeV}$ を用いた場合)

付録B SVD unfolding

B.1 簡単な例

ここでは unfolding の一番単純な例として、

$$A_{ij} X_j = b_i \quad (\text{B.1})$$

において、 $i = 1, 2$ 、 $j = 1, 2$ 、 A は 2×2 の行列である場合を考える。つまり、

$$\begin{cases} \mathbf{X} = (X_1, X_2) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2) \\ \hat{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

ここで ε は検出器の resolution を決定する要素で

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ の時 } : \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{理想的な検出器。真の分布そのものが観測された分布として得られる。} \\ \varepsilon = 0 \text{ の時 } : \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{resolution は最悪であり、真の分布に依らず観測される分布は同じになる。} \end{cases}$$

ここで、response matrix A は

$$A \equiv USV^T \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= VS^{-1}U^{-1} \\ &= VS^{-1}U^T \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{cases} U \text{ は直行行列なので } U^T = U^{-1} \\ \text{行列 } A \text{ に対する固有値は } 1 \text{ と } \varepsilon \end{cases} \begin{cases} \text{固有値 } 1 \text{ がのときの固有ベクトルは: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{固有値が } \varepsilon \text{ のときの固有ベクトルは: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

以上より、

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

となる。これを使い、真の分布を表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1/\varepsilon & 1-1/\varepsilon \\ 1-1/\varepsilon & 1+1/\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

上の式において、2項目の $\frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のために統計誤差が拡大されてしまう。このように、数学的に解いて求めては、物理的に意味のない分布を得ることになってしまう。

B.2 SVD unfolding における smoothing(regularization)

第節でもふれたように、SVD unfolding では「物理量を扱う際、隣合う2つの bin の変化 no で saize

$$\begin{cases} \omega_j = \frac{X_j}{X_j^{init}} \\ \sum_{j=1} \tilde{\mathbf{A}}_{ij} \omega_j = \tilde{\mathbf{b}}_i \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

と定義し直して、response matrix についても

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (\text{B.8})$$

とする。そして、

$$\begin{cases} \mathbf{d} \equiv \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{Z} \equiv \mathbf{V}^T \mathbf{C} \omega \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

を用いて統計的に意味のないところを探す。ただし、ここではなめらかに cut を入れるための要素を ξ として

$$|\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{b}|^2 + \xi |\mathbf{C} \mathbf{X}|^2 = \text{minimum} \quad (\text{B.10})$$

と、なるようなところを探す。ここで、 C は

$$\begin{cases} C_{11} = \dots = C_{nn} = -1 \\ C_{ii} = -2 \quad (i = 2 \sim n - 1) \\ C_{j \ j+1} = C_{j+1 \ j} = 1 \quad (j = 1 \sim n - 1) \text{ その他の } C_{ij} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

と選ばれている。実際には以上の方法を用いてデータの unfolding を行った。

B.3 unfolding に関する分布

ここでは、本文中では取り扱わなかった unfolding に関する分布の補足を行う。

B.3.1 SVD unfolding のテスト

(関連節は 5.2 節)

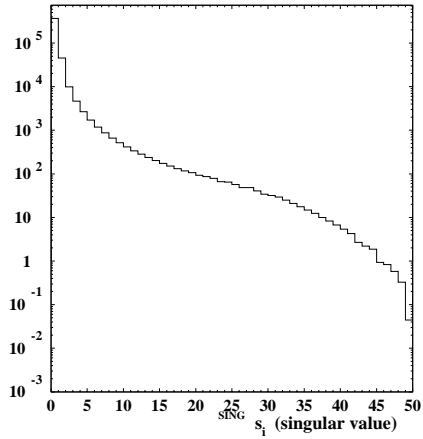


図 B.1: SVD unfolding のテストにおける singular value s_i 分布。横軸に i 、縦軸に s_i をとった図。

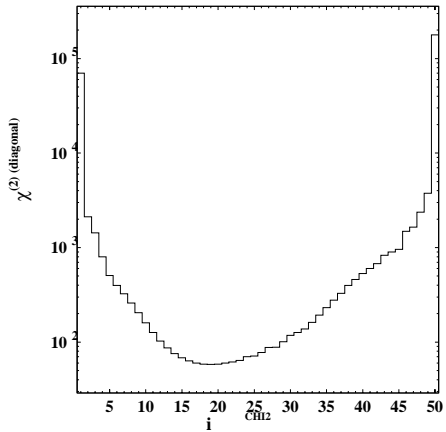


図 B.2: SVD unfolding のテストにおける χ^2 分布。横軸に i 、縦軸に対角成分のみを考慮した場合の χ^2 分布をとった図。

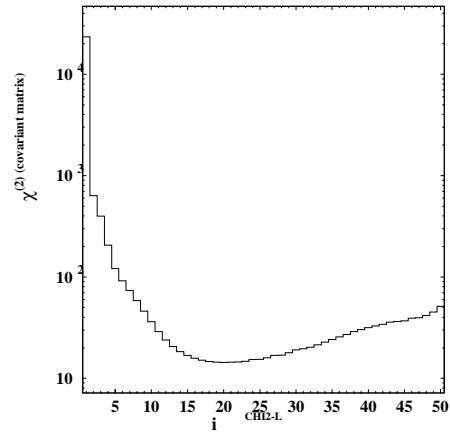


図 B.3: SVD unfolding のテストにおける χ^2 分布。横軸に i 、縦軸に χ^2 分布をとった図。

B.3.2 データの unfolding

(関連節は 5.3 節)

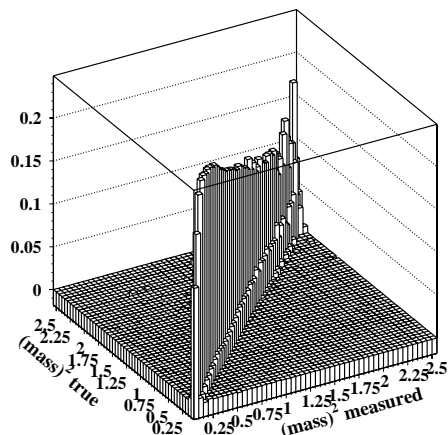
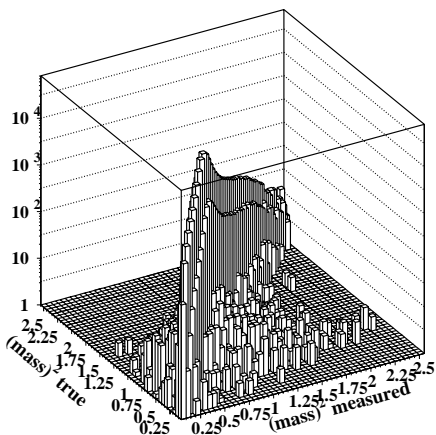


図 B.4: response matrix 分布 (event)。図 5.10 の 2次元 plot に対し、z 軸に entry 数をとった図。

図 B.5: response matrix 分布 (確率)

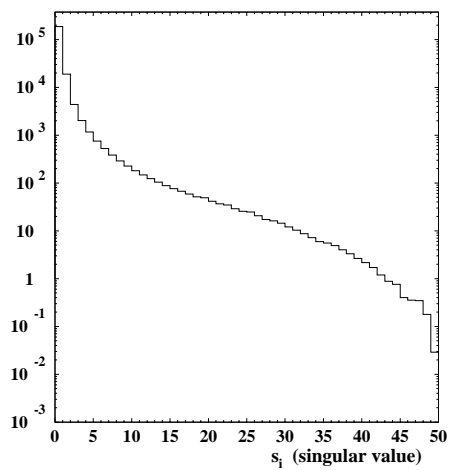


図 B.6: singular value s_i 分布。横軸に i 、縦軸に s_i をとった図。

付録C 誤差の取り扱い

C.1 fitting における誤差と χ^2 の取り扱い

(関連する節は 5.2、5.3)

普通、PAW 等の中で fitting する際、使われている χ^2 の定義は、

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_i, \alpha) - e_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{C.1})$$

となっている。ここで、

$$\begin{cases} \alpha & \text{fitting 変数} \\ e_i & \text{実験データ} \\ f(x_i, \alpha) & \text{fitting に用いる関数} \end{cases}$$

である。

しかし、本論文で取り扱ったような場合は error matrix を考慮しなければならない。上の定義を error matrix が考慮されるように書き換えると

$$\chi^2(\alpha) = \sum_{ij} (f(x_i, \alpha) - e_i)(X^{-1})_{ij}(f(x_j, \alpha) - e_j) \quad (\text{C.2})$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} \alpha & \text{fitting の変数} \\ e_i & \text{実験データ} \\ f(x_i, \alpha) & \text{fitting に用いる関数} \\ (X^{-1})_{ij} & \text{error matrix の逆行列} \end{cases}$$

である。式 C.2 にあるような χ^2 の取り扱いをするために、「MINUIT」を用いた。

本解析で用いた error matrix の逆行列を図 C.1 に示した。

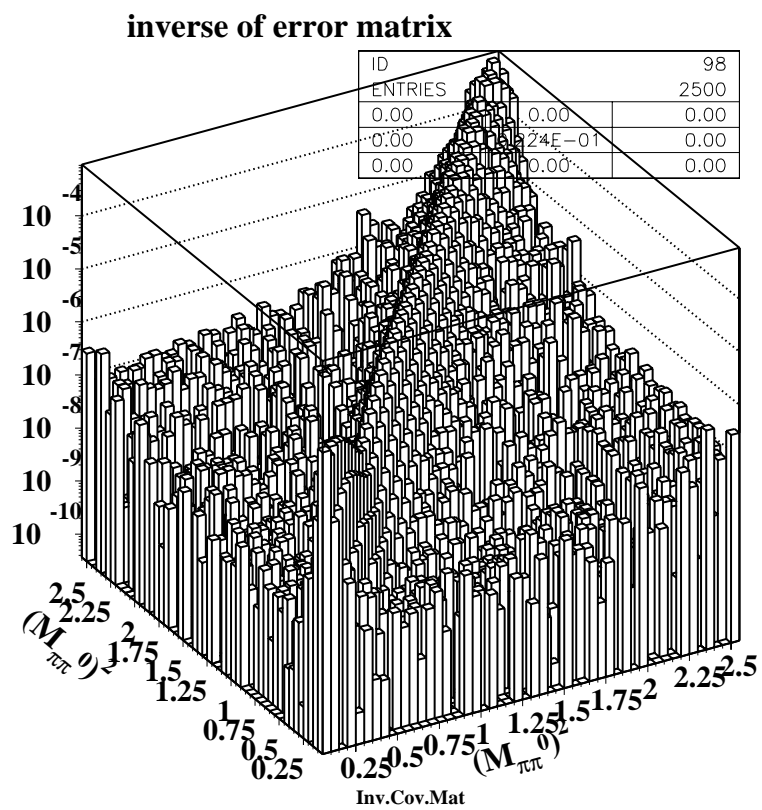


図 C.1: 本解析で用いた error matrix の逆行列。

C.2 ハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{\pi\pi}$) を求める際の誤差の取り扱い

(関連する節は 5.5)

5.5 節でも、書いたように $a_\mu^{\pi\pi}$ を求める際の誤差の取り扱いを式 5.34 とした。

$$\Delta a_\mu^{\pi\pi} = \sum_{i,j} \left(\frac{da_\mu}{dn_i} \right) \left(\frac{da_\mu}{dn_j} \right) E_{i,j}$$

ここで用いた error matrix を図 C.2 に示した。

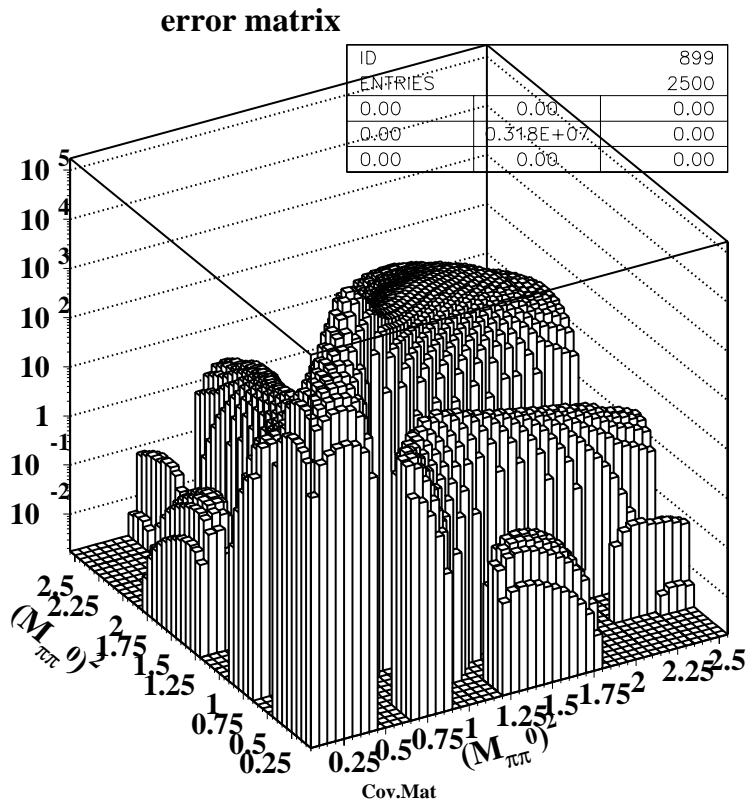


図 C.2: 本解析で用いた error matrix。 rank=8 となっている。

C.3 fitting に用いた変数間の相関関係

(関連する節は 5.2,5.3) 本論文において $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を fit して M_ρ や Γ_ρ の値を得た。このように fit に使う変数が複数ある場合、一般に変数同士が互いに関連性を持って動いていることが知られている。5.3 節において fit した際の、変数間の相関関係を correlation matrix として示す。以下の correlation matrix 中の 'norm.' は、fit する時の規格化定数である。

(1) *Kühn and Santamaria* モデル ($\rho + \rho'$, β and ϕ are used)

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} & norm. & M_\rho & \Gamma_\rho & M_{\rho'} & \Gamma_{\rho'} & \beta & \phi \\ \hline norm. & 1.00 & & & & & & \\ M_\rho & 0.75 & 1.00 & & & & & \\ \Gamma_\rho & 0.22 & 0.32 & 1.00 & & & & \\ M_{\rho'} & -0.73 & -0.39 & 0.28 & 1.00 & & & \\ \Gamma_{\rho'} & -0.77 & -0.58 & 0.12 & 0.71 & 1.00 & & \\ \beta & -0.91 & -0.61 & 0.13 & 0.92 & 0.75 & 1.00 & \\ \phi & -0.76 & -0.43 & 0.23 & 0.95 & 0.58 & 0.95 & 1.00 \end{array} \right) \quad (C.3)$$

(2) *Gounaris and Sakurai* モデル ($\rho + \rho'$, β and ϕ are used)

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} & norm. & M_\rho & \Gamma_\rho & M_{\rho'} & \Gamma_{\rho'} & \beta & \phi \\ \hline norm. & 1.00 & & & & & & \\ M_\rho & 0.74 & 1.00 & & & & & \\ \Gamma_\rho & 0.48 & 0.42 & 1.00 & & & & \\ M_{\rho'} & -0.64 & -0.38 & 0.15 & 1.00 & & & \\ \Gamma_{\rho'} & -0.76 & -0.59 & -0.02 & 0.72 & 1.00 & & \\ \beta & -0.89 & -0.67 & -0.08 & 0.86 & 0.84 & 1.00 & \\ \phi & -0.67 & -0.42 & 0.13 & 0.95 & 0.64 & 0.89 & 1.00 \end{array} \right) \quad (C.4)$$

付録D 崩壊分岐比

ミューオンの異常磁気モーメントの真空偏極項を求める際、本解析で求めた spectral function と並び、重要な要素に $\tau \rightarrow \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊における崩壊分岐比がある。

これについては、序論でも述べたようにすでに昨年の段階でこの前段階として $\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ 崩壊¹ $\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比 ($B_{h\pi^0}$) として、の崩壊分岐比測定が行われており [35]、

$$B_{h\pi^0} = 25.48 \pm 0.01(stat) \pm 0.53(sys) \% \quad (D.1)$$

が得られている。

今回の解析は、この解析に用いたものと同じデータを用いて行った。よって、確認のため、本解析に用いたデータを用いて $\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比を求めた。

$\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比は、以下のように表せる。

$$B_{h\pi^0} = \frac{N_{h\pi^0}}{2N_{\tau\tau}} \cdot \frac{(1 - b^{non-\pi\pi^0} - b^{non-\tau})}{(1 - b_{\tau\tau})} \cdot \left(\frac{\epsilon_{\tau\tau}}{\epsilon_{h\pi^0}^\tau} \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_{h\pi^0}^{ID}} \quad (D.2)$$

ここで用いられている要素の意味は以下の通りである。

{	$N_{\pi\pi^0}$	観測された $\pi\pi^0$ 崩壊の事象数
	$N_{\tau\tau}$	τ -pair event の数
	$b_{\tau\tau}$	τ -pair sample の中にバックグラウンドが存在する確率
	$b^{\pi\pi^0}$	$\pi\pi^0$ 崩壊事象における feed-across バックグラウンドの比
	$b^{non-\tau}$	$\pi\pi^0$ 崩壊事象における non- τ バックグラウンドの比
	$\epsilon_{\tau\tau}$	最終的な τ -pair 事象選別の efficiency
	$\epsilon_{\pi\pi^0}^\tau \cdot \epsilon_{h\pi^0}^{ID}$	$\pi\pi^0$ 崩壊の検出効率

ただし、 $\pi\pi^0$ 崩壊の検出効率 ($\epsilon_{\pi\pi^0}^\tau \cdot \epsilon_{h\pi^0}^{ID}$) に関しては、 τ -pair 事象選別条件によって観測された $h\pi^0$ 事象の検出効率 $\cdot \epsilon_{\pi\pi^0}^\tau$ と τ -pair event の中から $h\pi^0$ 事象を選別する効率 $\cdot \epsilon_{h\pi^0}^{ID}$ の2つの項からなっている。

¹ここで h とは、 K 中間子または π 中間子を指す。

以上のようにして、本解析における $\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比を求めると、

$$24.85 \pm 0.02(stat) \pm 0.30(sys) \% \quad (D.3)$$

となり、昨年得た結果と一致している。

また、崩壊分岐比を求める際の系統誤差の項目と、その要素がおよぼす値を以下の表 D.1 にまとめた。

結果の系統誤差 (sys) において最も大きな影響を与えているのは π^0 の検出効率による寄与である。

また、結果の中心値が、現在一般的に知られている平均値 (World average) よりも少し低めになっている。

PDG2002 による $\tau \rightarrow h\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比は

$B(h\pi^0) = 25.86 \pm 0.13\%$ である。この値と、本研究から得た値を比較してみると

$$\frac{(B(h\pi^0)_{this\,exp} - B(h\pi^0)_{PDG})}{B(h\pi^0)} = -1.01/25.85 = 0.039$$

となり、約-4%の違いが見られる。

これも、 π^0 の検出効率がモンテカルロとデータで少し違いがあり、モンテカルロが実際よりも高い検出効率で見積もられているためだと思われる。

この改良も、これからの課題となる。

表 D.1: 崩壊分岐比の系統誤差

item	B	ΔB $= B - B_{ref}$	condition
standard	24.85%	0.0 %	
Exp. Dep.		$\pm 0.08\%$	e09-e19
[tracking]			
chg. tracking eff.	25.09 %	± 0.24 %	$\Delta\epsilon_{track} = \mp 2\%$
only Barrel track	24.89 %	+0.04 %	$24^\circ < \theta_{track} < 138^\circ$
(sum)		$\pm 0.24\%$	
$[\pi^0/\gamma$ selection]			
π^0 backg. sub.	24.72 % 24.98 %	± 0.13 %	$\pi_L^0 = 1.0$ $\pi_L^0 = 1.34$
π^0 signal region	24.87 %	+0.02 %	$[-7\sigma, 7\sigma]$
Barrel γ only	25.02 %	+0.17 %	$34 < \theta_\gamma < 128$
left/right $\sigma_{L/R}$	24.87 %	+0.02 %	
γ energy scale		$\pm 0.03\%$	
(sum)		± 0.21 %	
[background in $N_{\tau\tau}$]			control sample
bhabha	24.81% 24.89%	$\pm 0.03\%$	
two-photon	24.83% 24.87%	$\pm 0.02\%$	
hadron($q\bar{q}$)	24.77% 24.93%	$\pm 0.08\%$	
(sum)		$\pm 0.09\%$	
[background in $N_{h\pi^0}$]			
feed across		± 0.03 %	uncertainty of Br
non- τ		± 0.04 %	control sample
[gamma veto]	24.80% 24.90 % 24.74 %	-0.05 % +0.05 % -0.11 %	$E_{veto} = 0.1$ GeV $E_{veto} = 0.3$ GeV no-veto
(sum)		± 0.05 %	
[trigger]			
trk. trg. eff.	24.72 %	∓ 0.13 %	$\Delta\epsilon_{track}^{trg} = \pm 5\%$
eng. trg. eff.	24.88 %	± 0.03 %	$\Delta\epsilon_{eng}^{trg} = \pm 5\%$
(sum)		$\pm 0.14\%$	
[others]			
MC-diff	24.79 %	-0.06 %	b20010523 b20020901
MC-stat.		$\pm 0.04\%$	b20020901

付録E 他の実験

本解析では、得られた結果について、先に行われた他の実験の結果と比較している。ここでは、本論文の中で挙げた他の実験についてまとめる。表 E.1 を参照。また、比較のため本解析で用いたデータについてもまとめた。

表 E.1: 他の実験との比較

実験名	加速器	重心系のエネルギー	データ	参照
our experiment				
<i>Belle</i>	KEKB	10.58 (GeV)	$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$	
other experiments				
<i>BNL</i>			g-2 実験 (<i>E821</i>)	[1],[2]
<i>CMD-2</i>	VEPP-2M	0.61 ~ 0.96 (GeV)	$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$	[6],[12],[13]
<i>ALEPH</i>	LEP	<i>Z</i> mass peak(91GeV)	<i>Z</i> -boson $\rightarrow \tau^+\tau^-$	[6],[8],[9]
<i>OPAL</i>	LEP	<i>Z</i> mass peak (91GeV)	<i>Z</i> -boson $\rightarrow \tau^+\tau^-$	[6],[14]
<i>CLEO</i>	CESER	10.6 (GeV)	$e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$	[6],[10],[11]

謝辞

本研究を行うにあたり、お世話になりました方々に紙面をお借りしてお礼を申し上げます。

はじめに、このように素晴らしい実験に携わる機会を与えてくださった、野口先生はじめ、奈良女子大学高エネルギー物理学研究室の先生方に感謝致します。

特に、直接指導してくださった林井先生には、大変お世話になりました。先生のおかげで、何もわからなかった私がこのように論文を書くことができました。先生からは、物理や解析の楽しさも教えていただきました。これは、私にとって何にも代えがたい大切な経験となりました。本当にありがとうございました。

また、解析を行うにあたり、大変お世話になりました居波さん、赤津さんをはじめ名古屋大学の皆様に心から感謝致します。

そして、いつも励まして下さった片岡先輩をはじめ研究室の皆様、お世話になりましたKEKの方々にもお礼を申し上げます。

最後に、私が充実した研究生生活を送ることができるよう、支えてくださったすべての方々に感謝致します。

関連図書

- [1] H.N. Brown *et al.*, Phys. Rev. Lett., **86**, 2227 (2001).
- [2] G.W. Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 101804 (2002).
- [3] A. Höcker, V. Kartvelishvili, Nucl. Instr. Meth. **A 372**, 487, (1996).
- [4] G. D'Agostini, Nucl. Instr. Meth. **A 362**, (1995).
- [5] M. Davier and A. Höcker, Phys. Lett., **B435**, 427(1998).
- [6] M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker and Z. Zhang, hep-ph/0208177.
- [7] K. Hagiwara, A.D. Martin, D. Nomura, and T. Teubner, hep-ph/0209187.
- [8] D. Buskulic *et al.*, (ALEPH Collaboration), Zeit. Phys. C **70**, 579 (1996).
- [9] R. Barate *et al.*, (ALEPH Collaboration), Zeit. Phys. C **76**, 15 (1997).
- [10] S. Anderson *et al.*, (CLEO Collaboration), Phys. Rev. D **61**, 112002 (2000).
- [11] M. Artuso *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72** 3762 (1994).
- [12] R.R. Akhmetshin *et al.*, (CMD-2 Collaboration), Phys. Lett. B **527** (2002) 161.
- [13] CMD-2 Collaboration, hep-ex/0112031.
- [14] K. Ackerstaff *et al.*, Euro. Phys. Jour. C **4** 193, (1998).
- [15] M. Acciarri *et al.*, Phys. Lett. B **345** 93, (1995).
- [16] F. Matorras, hep-ex/0211054
- [17] A. Abashian *et al.*(Belle Collaboration), Nucl. Instr. Meth. A **479**, 117 (2002).
- [18] G. Alimonti *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A453** (2000) 71.
- [19] H. Hirano *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A455** (2000) 294; M. Akatsu *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A454** (2000) 322.

- [20] H. Ikeda *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A441** (2000) 401.
- [21] T. Iijima *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A453** (2000) 321.
- [22] H. Kichimi *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A453** (2000) 315.
- [23] A. Abashian *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A449** (2000) 112.
- [24] Y. Ushiroda *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **A438** (1999) 460.
- [25] K. Inami, “A Search for T/CP Violation in $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$, Belle note 430.
- [26] KORALB(v.2.4)/TAUOLA(v.2.6): S. Jadach and Z. Was, Comp. Phys. Commun. **85** (1995) 453 and *ibid*, **64** (1991) 267, *ibid*, **36** (1985) 191; S. Jadach, Z. Was, R. Decker and J.H. Kühn, Comp. Phys. Commun. **76** (1993) 361, *ibid*, **70** (1992) 69, *ibid*, **64** (1991) 275.
- [27] F.A. Berends, P.H. Daverveldt and R. Kleiss, Comp. Phys. Commun. **40** (1986) 285.
- [28] S. Jadach, W. Placzek, E.R. Was, B.F.L. Ward and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **70** (1992) 305.
- [29] S. Jadach, B.F.L. Ward and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **130** (2000) 260; S. Jadach, B.F.L. Ward and Z. Was, Phys. Rev. **D63** (2001) 113009.
- [30] The QQ B meson decay event generator was developed by the CLEO Collaboration. See the following URL:
<http://www.lns.cornell.edu/public/CLEO/soft/QQ>.
- [31] S. Jadach, W. Placzek, E.R. Was, B.F.L. Ward and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **102** (1997) 229.
- [32] S. Jadach, B.F.L. Ward and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **130** (2000) 260; S. Jadach, B.F.L. Ward and Z. Was, Phys. Rev. **D63** (2001) 113009.
- [33] F.A. Berends, P.H. Daverveldt and R. Kleiss, Comp. Phys. Commun. **40** (1986) 285.
- [34] R. Brun *et al.*, GEANT 3.21, CERN Report No. DD/EE/84-1 (1987).
- [35] 片岡真由子
2001 年度 修士学位論文 「タウ粒子ハドロニック崩壊 ($\tau \rightarrow h\pi^0\nu$) の崩壊分岐比測定」
- [36] 岡崎知子
2000 年度 修士学位論文 「 $\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\nu_\tau$ 崩壊における CP 非保存現象の探索」