第5章　$\pi^-\pi^0$ スペクトラル関数 測定

この章では 4 章で得た $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊からの、$(M_{\pi^\pm\pi^0})^2$ 分布を unfolding し、検出器の寄与などが入っていない $(M_{\pi^\pm\pi^0})^2$ 分布を得て、そこから本解析の目的であるスペクトラル関数の測定を行う。この章で行う手順を以下に示した。

1. **unfolding プログラムのテスト** (5.2 節)
2. **データの unfolding** (5.3 節)
3. **unfold した分布の fitting と他の実験との比較** (5.3 節)
4. **スペクトラル関数と、パイオンの構造因子を求める** (5.4 節)

5.1　unfolding

この節では、「 unfolding 」について述べる。

一般に、観測された不変質量には、その検出器のアクセプタンスや分解能等からの寄与がある。このため、検出器から得た質量分布は実際の分布 (真の分布) と同じではなく、幾分歪められている。よって、真の分布を得るにはこれらによる歪みを考慮する必要がある。このとき、「 観測された分布 」から、統計的に意味を持つデータのみを用いて、検出器に入る前の「 真の分布 」を求めることを、「 unfolding 」という。

unfolding で真の質量分布を求めることは、高エネルギー実験にとって非常に重要なことであるにも関わらず、unfolding することは難しく、様々な研究が行われている。現在確立されている unfolding の方法としては、CERN で行われていた ALEPH 実験で開発され発展した'Singular Value Decomposition ' 法 [18] や、DESY 実験で発展した 'Bayes theorem' 法 [4] などがある。

今回、本解析に用いたのは、'Singular Value Decomposition (SVD)' 法で、この方法は、比較的シンプルな方法であると言われている。
以下で、unfolding と SVD unfolding 法について簡単に述べる。(詳しくは [18] 参照)

まず、真の分布、検出器の responce matrix、観測によって得られた分布をそれぞれ

$$\begin{cases} \text{真の分布 (今知りたい分布)} & \cdots \ \boldsymbol{X}_j \ (X = x_1, \ldots, x_n) \\ \text{検出器の responce matrix} & \cdots \ \hat{\boldsymbol{A}}_{ij} \ (\hat{\boldsymbol{A}} = \hat{A}_{11}, \ldots, \hat{\boldsymbol{A}}_{mn}) \\ \text{観測された分布} & \cdots \ \boldsymbol{b}_i \ (b = b_1, \ldots, b_m) \end{cases}$$

とおく。ここで検出器の responce matrix は、「真の分布では、Bin=j であった事象が観測された分布では Bin=i で再構成される確率」で与えられる。本解析において検出器の responce matrix は、モンテカルロシュミレーションを用いて得たが、これについては 5.3.1 節で詳しく述べる。これらを使って 3 つの関係を表すと、

$$\sum_j \hat{\boldsymbol{A}}_{ij}\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_i \tag{5.1}$$

のようになる。数学的にこの解を求めようとするならば、

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

となる。responce matrix$\boldsymbol{A}$ が、もし対角要素のみならば、「真の分布での Bin j = 再構成したときの Bin i」となり、問題はない。しかし実際には非対角要素があり、これがあるとき統計的なふらつきが拡大されて見える。これにより、式 5.1 のように responce matrix の逆行列を作用させても、正しい分布が得られない。(付録 5.2 に簡単な例を示した。) そこで SVD unfolding では以下のようにして統計的に意味を持たない部分を除いている。

まず、responce matrix $\boldsymbol{A}$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \\ &= \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^T\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで、$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は直行行列[1]、$\boldsymbol{S}$ は対角行列[2]であり、

$$s_i \geq s_{i+1} \tag{5.3}$$

となっている。この順に並べることが重要であり、これは、後から統計的に意味のないところを除くために使う。式 5.2 を使い、式 5.1 式を表すと、

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} \tag{5.4}$$

となる。これを変形して、

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b} \tag{5.5}$$

ここで、$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{b}$ を回転させた系で考えることにする。

$$\begin{cases} \text{真の分布 } \boldsymbol{X} \text{ を回転させた系} & \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{X} \\ \text{観測された分布 } \boldsymbol{b} \text{ を回転させた系} & \boldsymbol{d} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b} \end{cases}$$

[1] $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$

[2] $s_{ij} = 0 \quad (\text{for } i \neq j) \ , \ s_{ii} \equiv s_i \geq 0$. ここで、s_i は Matrix $\boldsymbol{A}$ の singular value と呼ばれる。

上の回転させた系を用いると、

$$\boldsymbol{SZ} = \boldsymbol{d} \tag{5.6}$$

となる。真の分布を回転させた系である $\boldsymbol{Z}$ を求めると、解は以下のようになる。

$$\boldsymbol{Z}_i = \frac{\boldsymbol{d}_i}{\boldsymbol{S}_i} \tag{5.7}$$

しかし、このままでは前にも書いたように $\boldsymbol{S}_i$ が小さいとき、統計誤差が拡大されしまう。

この解において、統計的に意味を持たないのは、「$\boldsymbol{d}_i$ = 統計誤差」となるようなところである。この場合のデータを除くために'cutoff parameter τ' を導入し、式 5.7 を

$$\boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{d}_i \boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{s}_i^2 + \tau} \tag{5.8}$$

と定義し直す。ここで、

$$\tau = \boldsymbol{S}_k^2 \tag{5.9}$$

であり、k は「データとして意味のあるところと、統計的に意味のないところを区別するための値」であり、「responce matrix $\boldsymbol{A}$ の rank」と呼ばれている。つまりこれを使うと

$$\begin{cases} \tau < \boldsymbol{S}_i \cdots & \text{意味のあるデータとして unfolding に用いる} \\ \boldsymbol{S}_i^2 \tau \cdots & \boldsymbol{Z}_i = 0 \text{ となり、統計的に意味のないデータとして無視する} \end{cases}$$

と言ったようにデータを区別することができる。では次に、「どのようにして'τ' を決めるか」について話を進める。

'τ' は $\boldsymbol{d}$ の i 番目の項において、

$$\frac{\boldsymbol{d}_i}{\sigma_{d_i}} = 1 \tag{5.10}$$

この意味は、「d_i がそれ自身の統計誤差 σ_{d_i} と等しくなるところ」である。この判断のために、横軸に i、縦軸に $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ を図 5.2 のようにとり、「初めて $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}| \quad \sim 1$ となるような i の値」を「responce matrix の rank k」とした。i が k よりも大きいところのデータは unfolding に用いて、i が k よりも小さいところのデータは除いている。

以上のようにして、統計的に意味のないところを除き、意味のあるデータのみを用いて、観測された分布から真の分布 $\boldsymbol{X}$ を求める方法が「Singular Value Decomposition (SVD) unfolding」法である。

ただし、実際の SVD unfolding では、単に k で有意義なデータとそうでない物を分け、統計的に意味を持たないと判断されたデータを一切使わないのではなく、「意味がないと判断された範囲のデータについては、データの重み (weight) を減らす」という形で、なめらかに cut を入れている。

また、bin 間の振動をさけるために、「物理量を扱う上では、隣り合う bin どうしでは大きな変化はない」という条件をいれている。この方法は、「smoothig(regularization)」と呼ばれている [??]

unfolding において、cutoff parameter の決定は非常に重要であり、これを誤ると、

$$\begin{cases} \text{cutoff parameter が小さすぎる時} & \cdots \text{ 求めた分布 } \boldsymbol{X} \text{ は意味のない分布になる} \\ \text{cutoff parameter が大きすぎる時} & \cdots \text{ 求めた分布 } \boldsymbol{X} \text{ は物理的に重要な情報を欠いた分布になる} \end{cases}$$

となってしまう。この例は次の 5.2 節でもふれることとする。

また今回、実際に行った unfolding の流れを図 5.1 に示した。以下、unfolding を行う際はこれにのっとって進めた。図中の「 unfolding program ∼Singular Value Decomposition Method 」がこの節で述べた内容に相当する。

5.2 SVD unfolding プログラムのテスト

今回用いたプログラムは、CERN program Library で開発され発展したもので、FORTRAN で書かれたプログラムである。実際のデータを使った unfolding を実行する前に、この unfolding のプログラムが正常に働いているか確かめた。方法としては、以下の通りである。

1. 既知の分布をテスト分布として使う。
2. 観測された分布は $\boldsymbol{b}_i = \sum_j \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{X}_j$ で得るとする。ここで、response matrix $\boldsymbol{A}_{ij}$ はモンテカルロから得る。
3. 観測された分布を、統計誤差 Δb_j を使いガウス分布で smear した。
4. unfolding を実行する。
5. 得られた結果を fit する。
6. unfolding の結果得られた分布と最初のテスト分布を比較して、unfoldin によって真の分布が得られているかどうかを確かめる。

この場合、単に統計誤差で smear しているだけなので、unfolding した結果は、プログラムが正しく働いているならば、もともとの分布 (テスト分布) と一致しなければならない。以下では、この流れで unfolding のプログラムが正しく働いているか確かめた。

5.2.1 unfolding のテストに用いたデータ

まず、テスト分布として用いたのは、実際のデータを記述することにもなる Breit-Wigner の分布である。記述としては、5.3.2 節で述べる Khün&Santamaria モデルを使い、ρ のみを考慮した場合の分布とした。つまり、5.3.2 節の式 5.18 が以下のように記述されるような分布である[3]。

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta} \cdot BW_\rho \tag{5.11}$$

[3] この分布は'Toy MC' を使って作った。

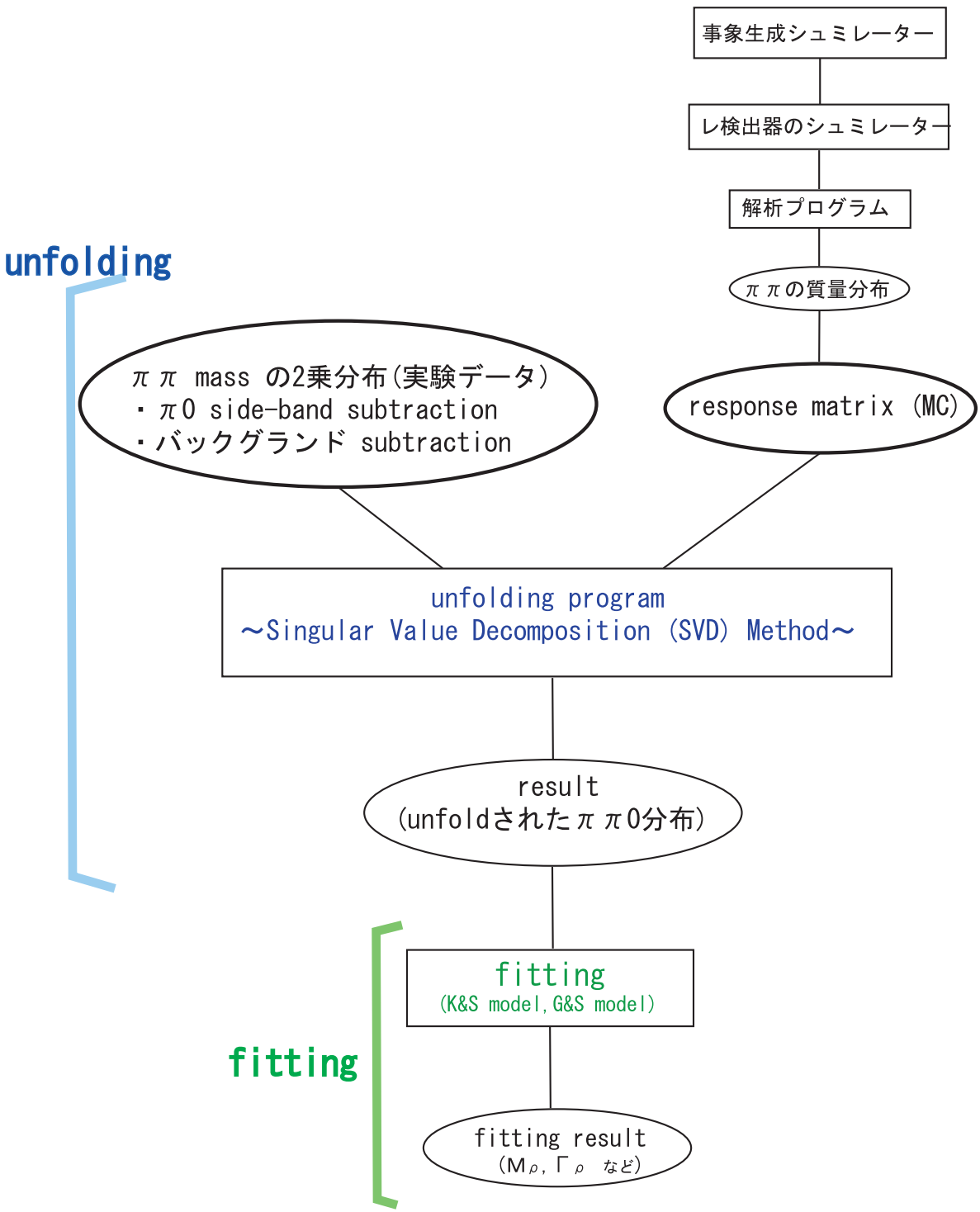

図 5.1: 実際のデータを入力として、unfolding する際の流れ

次に、response matrix についてだが、これは実データに対する unfolding を行った際に用いたのと同じものを使った。次の節 5.3 の図 5.10 を参照。この行列の要素を得る方法については次の節で述べる。

また、観測された分布は上でも述べたように、テスト分布から $\boldsymbol{b}_i = \sum_j \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{X}_j$ で、これを統計誤差 $\Delta\boldsymbol{b}_j = \sqrt{\boldsymbol{b}_j}$ で smear することで得た。

これらのデータを用いて unfolding を実行した。

5.2.2 unfolding プログラムに対するテストの結果

unfolding の結果、図 5.2 のように rank=7 となり、分布を図 5.3 を得た。また、図 5.4 は、もともとのテスト分布から unfolding した結果得られた分布を引いた図であり、どの Bin においてもだいたい $1\sigma \sim 2\sigma$ の範囲内で一致していることがわかる。ここからも unfolding で得られた分布は、もともとの分布を再現できていることがわかる。

また、cutoff 変数の選び方を誤った例として、unfolding の結果得られた結果とそのときの $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ 図を、図 5.5 ∼ 図 5.8 に示した。図 5.5 と図 5.6 は rank=2 の場合であり、cutoff 変数が小さすぎる例である。一方、 図 5.7 と図 5.8 は rank=49 の場合であり、cutoff 変数が大きすぎる例である。このいずれの場合も、unfolding で得られた結果がもともとのテスト分布を正しく再現できていないことがわかる。

5.2.3 unfolding で得られた分布の fit と真の分布との比較

unfolding して得られた分布 図 5.3 を、もともとのテスト分布を作ったときの形である、BW(K&S model) で fit する。fit した結果を図 5.9 と表 5.2.3 に示す。図 5.9 においては、fit に用いた関数が unfold して得られた分布とよく合っていることがわかる。いずれにおいても、unfolding された分布はテスト分布を正しく再現できていることがわかる。また、表 5.2.3 においては、fit の結果がテスト分布の要素と一致しているだけでなく、 $\chi/d.o.f$ の値ももっともな値になっている。

以上より、unfolding プログラムは正しく働いていることが確かめられた。次の章では、実際にデータの unfolding を行う。

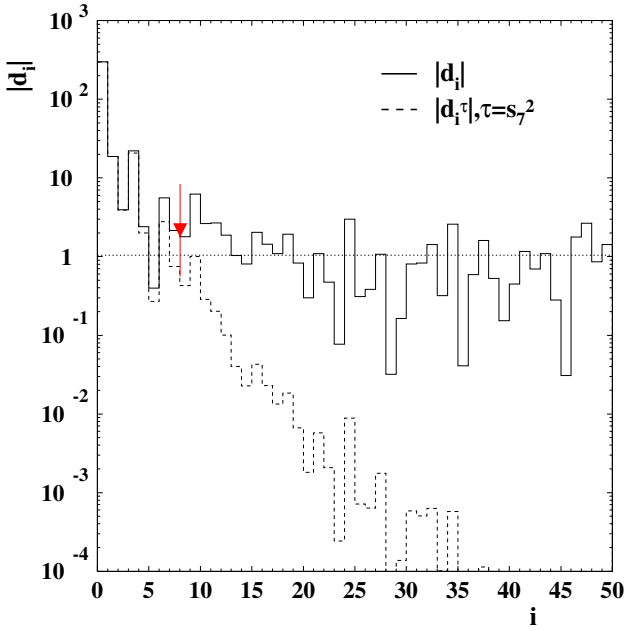

図 5.2: SVD unfolding のテストにおける $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 図。 横軸に i、縦軸に $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ をとった図。図中の矢印は「初めて $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}| \sim 1$ となるような i の値」、つまり rank を示している。今の場合 rank=7 となっている。図中のヒストグラムは実際の $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 分布であり、点線のヒストグラムは rank を考慮した場合である。このように、なめらかな cut を入れたデータを使い、unfolding を行った。

表 5.1: unfolding のテストにおける fit の結果

	テスト分布を作るときの値	*unfolding* で得られた分布を *fit* した結果
M_ρ (MeV)	774.9	774.1 $\pm$ 0.4
Γ_ρ (MeV)	144.2	144.6 $\pm$ 0.8
$\chi/d.o.f$		63.2/46= 1.37

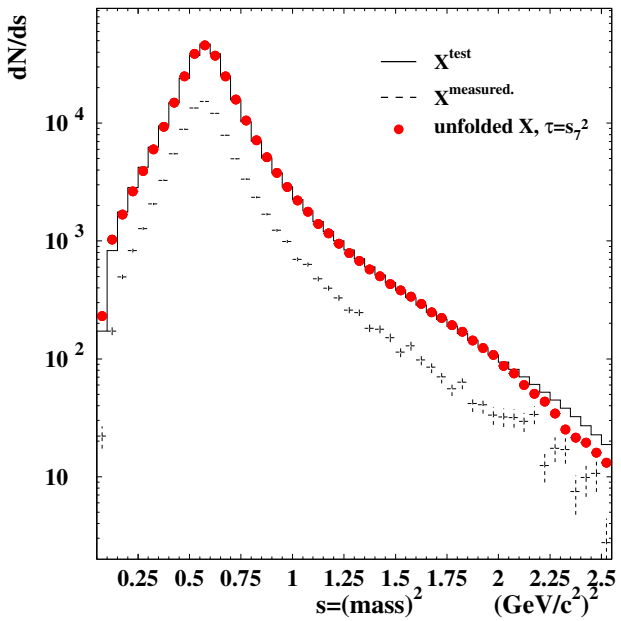

図 5.3: SVD unfolding のテストにおいて得られた分布。 実線のヒストグラムはもともとのテスト分布を、点線の分布は観測された分布を、赤の点は unfolding した結果得られた分布を示している。

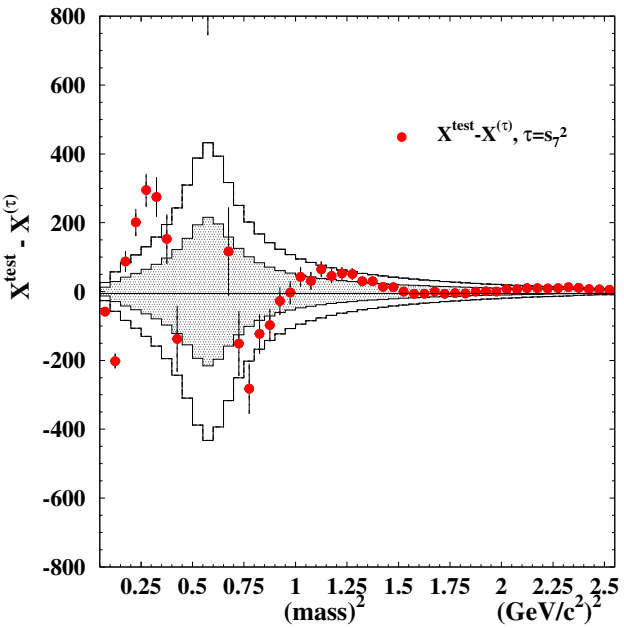

図 5.4: $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ 図。 もともとのテスト分布から unfolding して得られた分布を bin ごとに引いた図。赤の点が $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ を表しており、影つきのヒストグラムは 1σ の範囲を、白のヒストグラムは 2σ の範囲を示している。

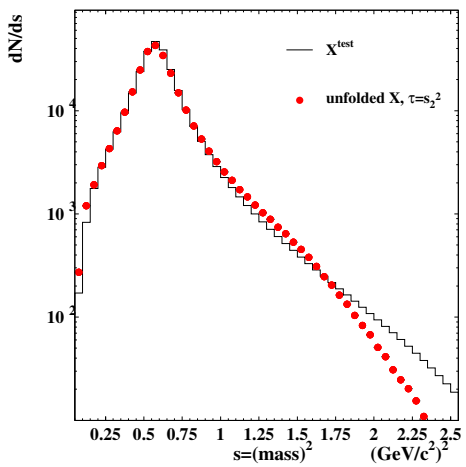

図 5.5: unfolding において cutoff 変数が小さすぎる場合の分布。 この図では、rank=2 になっている。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.3 と同じである。

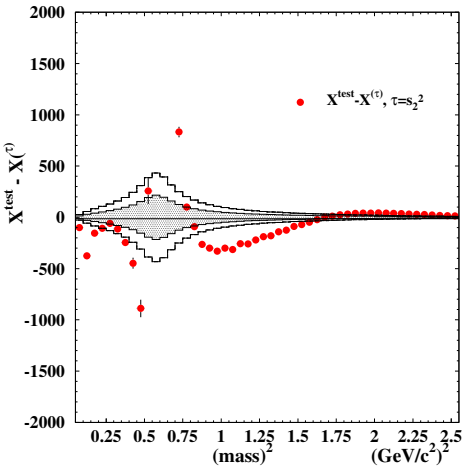

図 5.6: cutoff 変数が小さすぎる場合の $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ 図。 図 5.5 における $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ を示している。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.4 と同じである。

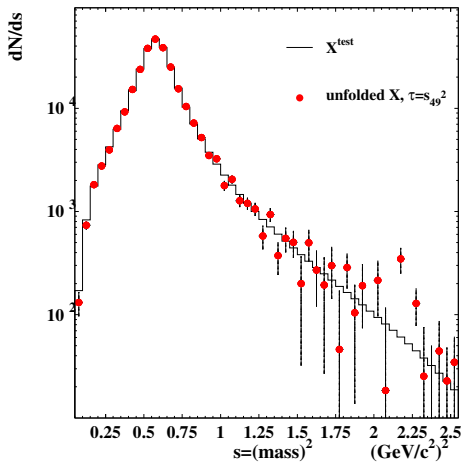

図 5.7: unfolding において cutoff 変数が大きすぎる場合の分布。 この図では、rank=49 になっている。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.3 と同じである。

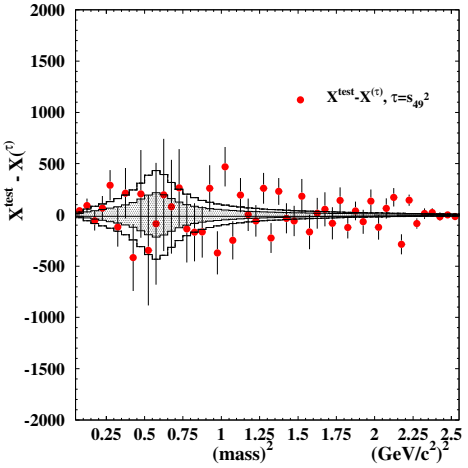

図 5.8: cutoff 変数が小さすぎる場合の $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ 図。 図 5.7 における $\boldsymbol{X}^{test} - \boldsymbol{X}^{unfold}$ を示している。図中の点やヒストグラムの意味は図 5.4 と同じである。

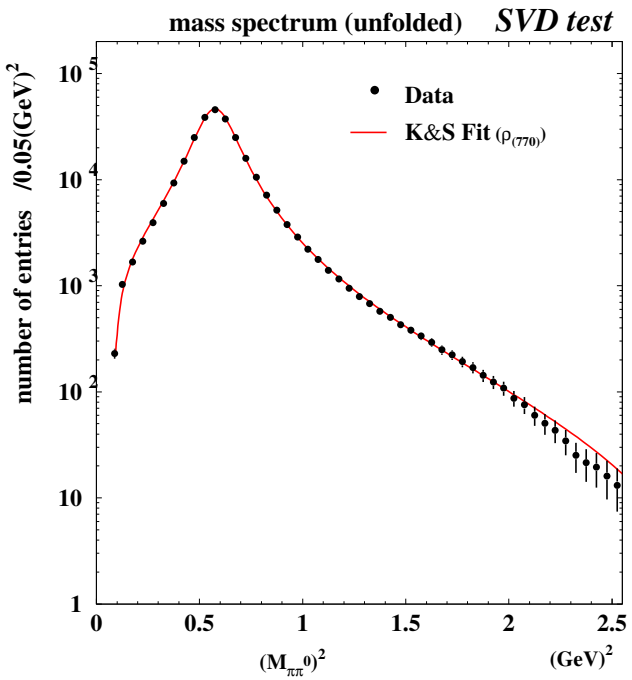

図 5.9: unfolding した分布を BW(K&S モデル) で fit した図。ヒストグラムが unfolding で得られた分布、赤の線が fit の関数である。

5.3 データを用いた $\pi\pi^0$ の不変質量分布 $((M_{\pi\pi^0})^2)$ の unfolding

この節では、前節 5.2 で確かめた unfolding プログラムを使い、実際のデータに対する unfolding を行う。

5.3.1 unfolding に使用したデータ

unfolding を行うためには、図 5.1 にもあるように、

(1) モンテカルロから求めた response matrix
(2) データでの $\pi\pi^0$ の質量の 2 乗分布

が必要である。

(1) モンテカルロを用いて response matrix を求める

response matrix は、「検出器の分解能などで歪められる前の分布では Bin=j であったものが、Bin=i で観測される確率」で表せる。この情報を、本解析ではモンテカルロシュミレーションを用いて得た。方法としては、モンテカルロシュミレーションを検出器のシュミレーションと実データに用いる解析プログラムに通すことで得る。つまり、$\boldsymbol{A}_{ij}$ はモンテカルロが generate されたときの分布と検出器のシュミレーションと解析プログラムの再構成の結果得た分布との比較により得た関係と言い換えることができる。

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{ij} = \frac{\boldsymbol{A}_{ij}}{\boldsymbol{X}_j^{init}} \tag{5.12}$$

もし、影響するものが全くないならば、Bin=j にあったものは、Bin=j(i=j) で必ず観測されるはずである。しかし、現実には、観測される分布は必ず何らかの影響を受ける。ここで、影響を与えるものは以下の 2 つに分けられる。

- $\tau - pair$ 事象や、$\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選別する際に落ちてしまった事象など、その事象があったにも関わらず検出できなかった事象による寄与 (検出効率)
- 検出器で検出され、かつ $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を選別をしても残っていた事象が、検出器の resolution 等の影響で、もともとの Bin とは違った Bin で検出された事からくる寄与 (検出器の分解能)

前者の「事象を検出できなかったことによる寄与」は、4 章ですでに述べた。
もう一方の「もともとの Bin とは違った Bin で検出された事による寄与」については、response と呼ばれている。これは検出器において、「Bin=j で作られ (generate) た event が、Bin=i で観測される」という関係を表したもので、これを response matrix と呼ぶ。$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布についてこの関係を図 5.10 に示した。

図 5.10 において、縦軸が generate された時の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布、横軸が観測されたときの分布である。ほとんどの事象は、「generate された Bin j = 観測された Bin i」を示す一直線上に分布しているが、少しずれたところにも事象があり、「真の分布における Bin(generate された Bin) j ≠ 観測された Bin(再構成された Bin) i」となるような相関関係があることがわかる。また、この図において、事象が多いところについては精度良く決まっているものとして大きな weight をあて、事象が少ないところについては weight を小さくして unfolding が行われる。

次に、全体のアクセプタンスを考えてみる。アクセプタンスは

$$\eta_j = \sum_i \frac{\boldsymbol{A}_{ij}}{\boldsymbol{X}_j^{init}} \tag{5.13}$$

で表される。$\sum_j$ は観測された分布について足しあげることを示している。これを質量の範囲ごとに見てみると、図 5.11 のようになる。また、「generate された時の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布」$\boldsymbol{X}_j^{init}$ 分布は図 5.12 に示した。

response matrix は図 5.10 を質量の範囲で区切った時、その Bin に入った事象数に対し、図 5.12 の Bin ごとの事象数で割ったもので得られる。
response matrix を求める上で Bin の幅を決めることは、responce matrix の形に直接関係することから大変重要なことである。今回は、Bin の幅として $0.05(GeV)^2$ を用いた[4]。

(2) データにおける $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布

データにおける $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を図 5.13 に示した。$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布については、図 A.1,4.18 でも示したが、図 5.13 では unfolding するため Bin の幅が response matrix を決めたときと同様の $0.05(GeV)^2$ を用いている[5]。unfolding に用いるデータとしては、図 5.13 のデータの値から、モンテカルロで見積もったバックグラウンド ($non-\tau$ バックグラウンドと feed accross バックグラウンドを足したもの) を引いた分布を用いている。

$$N_{signal} = N_{total} - N_{B.G.} \tag{5.14}$$

ここで、このデータに対する統計誤差は、

$$\sigma_{signal} = \sigma_{total} \tag{5.15}$$

とした。
これらを用いて、unfolding を実行した。

[4]これは、検出器の分解能を $0.005 \sim 0.03(GeV)^2$ と見積もったためである。
[5]図 A.1,4.18 では、Bin 幅がこの 1/2、つまり $0.025(GeV)^2$ になっている。

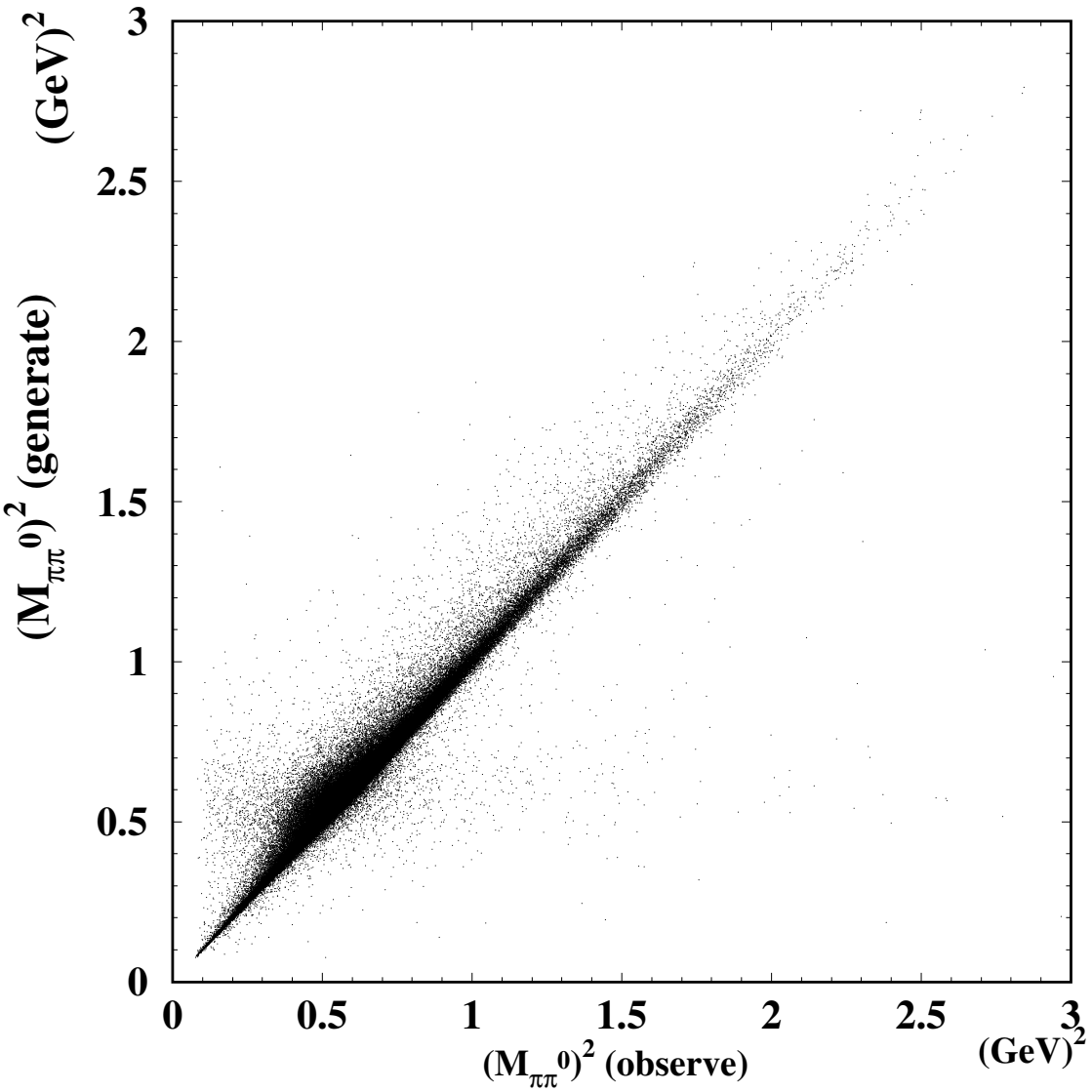

図 5.10: $(M_{\pi\pi^0})^2|_{generate}$ $.VS.$ $(M_{\pi\pi^0})^2|_{observed}$ plot. $\tau \to \pi\pi^0\nu$ 崩壊のモンテカルロを使い、縦軸に generate された時の $\pi\pi^0$ の質量の 2 乗分布を、横軸にはそれが観測されたときの分布をとり、これら 2 つの分布の相関関係を 2 次元 plot で表した図。

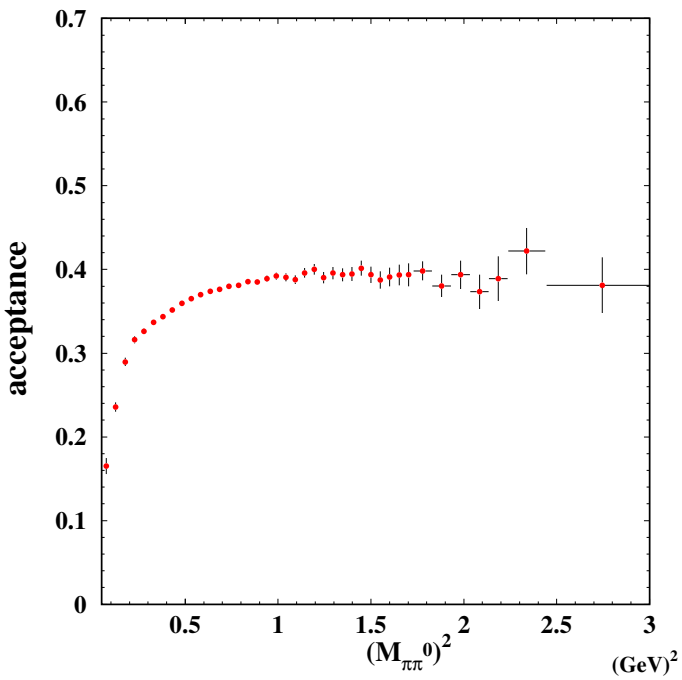

図 5.11: モンテカルロで見積もった $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲ごとアクセプタンス。 縦軸にアクセプタンス (η_j) を、横軸には $(M_{\pi\pi^0})^2$ をとった図。

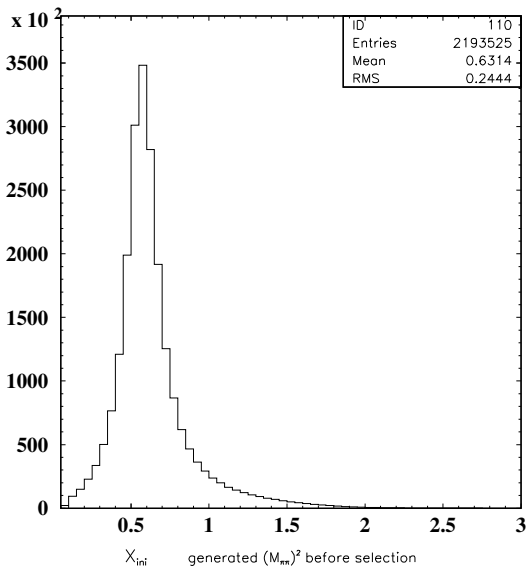

図 5.12: (X_{ini}) 分布。 この分布はモンテカルロで generate されたときの $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布であり、ここには、事象選別による寄与や検出器による寄与は含まれていない。

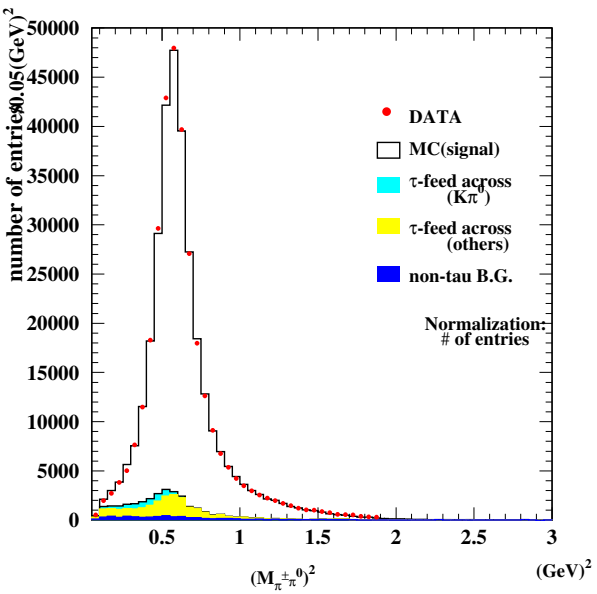

図 5.13: $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 (Bin 幅は $0.05(GeV)^2$)。 図中の点やヒストグラムの意味は図 4.18 と同じである。

5.3.2 Breit-Wigner 関数の定義

2 章でもふれたように、スペクトラル関数 $(v^{\pi\pi}(s))$ やパイオンの構造因子 $(|F_\pi|^2)$ には、$\rho(770)$ 中間子や $\rho(770)$ の励起状態である $\rho(1450)$、$\rho(1700)$ 中間子の質量分布の形が大きく寄与する。
ρ 中間子の不変質量分布を表すものとして、「Breit-Wigner (BW)」による記述が知られている。さまざまな「Breit-Wigner (BW)」による記述の中から、本論文では *Kühn and Santamaria* モデル(K&S モデル) と、*Gounaris and Sakurai* モデル(G&S モデル) の 2 つについて考えることとし、これを用いて $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の fit を行う。

1: Kühn and Santamaria モデル (K&S モデル)

K&S モデルは比較的単純な形で表せることに加え、*CLEO II* で開発されたモンテカルロシュミレーション TAUOLA の中で τ の崩壊を記述する関数として用いられているため、fiitng 関数として効果的である。
この場合、$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 $(\frac{dN}{ds})$ は以下のように表される。

$$\frac{dN}{ds} = A \times (1 - \frac{s}{M_\tau^2})^2(1 + \frac{2s}{M_\tau^2})v^{\pi\pi^0}(s) \tag{5.16}$$

ここで、2 章でも述べたようにスペクトラル関数 $(v^{\pi\pi^0}(s))$ はパイオンの構造因子 $(F_\pi(s))$ を用いて以下のように表すことができる。

$$v^{\pi\pi^0}(s) = \frac{1}{12}|F_\pi(s)|^2\beta_\pi^3 \tag{5.17}$$

また、パイオンの構造因子 $(F_\pi(s))$ は Breit-Wigner 関数を用いて

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta+\gamma}(BW_\rho + \beta BW_{\rho'} + \gamma BW_{\rho''}) \tag{5.18}$$

と表すことができる。ここには、$\rho(770)$(式 5.18 において ρ に対応する)、$\rho(1450)(\rho')$、$\rho(1700)(\rho'')$ が考慮されている[6]。

Kühn and Santamaria モデルにおいて、Breit-Wigner 関数は以下のように定義される。

$$BW_\rho^{KS} = \frac{1}{(M_\rho^2 - s) - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)} \tag{5.19}$$

[6]これに、$\rho-\omega$ 干渉を考慮に入れると、

$$F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta+\gamma}(BW_\rho\frac{1+\delta BW_{\omega(783)}}{1+\delta} + \beta BW_{\rho'} + \gamma BW_{\rho''})$$

となるが、$\omega \to \pi^+\pi^-$ 反応はアイソスピン保存より、e^+e^- 対消滅でしか起らない。よって、今回のように τ のデータを扱うときは $\rho-\omega$ 干渉を考慮しなくてもよい $(\delta = 0)$

ここで、BW_ρ^{KS} の中で使われている要素は以下のようになっている。

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho \left(\frac{M_\rho^2}{s}\right)^{\lambda=1} \left(\frac{k(s)}{k(M_\rho^2)}\right)^3 \tag{5.20}$$

$$k(s) = \frac{1}{2}\sqrt{s}\beta_\pi(s) \tag{5.21}$$

$$\beta_\pi(s) = \sqrt{\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2}{s}\right)\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2}{s}\right)} \tag{5.22}$$

以上の式 (5.16∼5.22) の中で使用した要素は以下の通りである。

A : 規格化定数
s : $(M_{\pi\pi^0})^2$
$\frac{dN}{ds}$: $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布
M_τ : τ の質量
M_ρ : ρ の質量
Γ_ρ : ρ の幅
m_π : π の質量
$k(s)$: $\pi\pi^0$ 静止系での運動量

2: Gounaris and Sakurai モデル (G&S モデル)

Gounaris and Sakurai モデルは、$e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ の散乱断面積を記述するために、用いられてきた。より広い領域の共鳴状態に対する散乱振幅を精密に取り扱うのに有効であるという特徴がある。

Gounaris and Sakurai モデルにおいても、$(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布 $(\frac{dN}{ds})$ は K & S モデルと同様、式 5.16 で表される。また、スペクトラル関数、パイオンの構造因子 $(F_\pi(s))$ に関しても K&S モデルと同じ形式であり、式 5.17,5.18 で書き表せる。しかしながら、Breit-Wigner 関数の形が違い、

$$BW_\rho^{GS} = \frac{M_\rho^2(1 + d\cdot\Gamma_{\rho(s)})}{(M_\rho^2 - s) + f(s) - i\sqrt{s}\Gamma_\rho(s)} \tag{5.23}$$

となる。G&S モデルの Breit-Wigner 関数には、K&S モデルに加え、分子に $M_\rho(d\frac{\Gamma_\rho}{M_\rho})$、分母に $f(s)$ が付け足されていることが特徴である。ここで、$f(s)$,$h(s)$ は

$$f(s) = \Gamma_\rho \frac{M_\rho^2}{k^3(M_\rho^2)}\left[k^2(s)\left(h(s) - h(M_\rho^2)\right) + (M_\rho^2 - s)k^2(M_\rho^2)\frac{dh}{ds}\Big|_{s=M_\rho^2}\right] \tag{5.24}$$

$$h(s) = \frac{2}{\pi}\frac{k(s)}{\sqrt{s}} ln \frac{\sqrt{s}+2k(s)}{2m_\pi} \tag{5.25}$$

$$\frac{dh}{ds}|_{M_\rho^2} = h(M_\rho^2)\left[\left(8k^2(M_\rho^2)\right)^{-1} - (2M_\rho^2)^{-1}\right] + (2\pi M_\rho^2)^{-1} \tag{5.26}$$

で表される。そして、d は、$F_\pi(0)=1$、つまり $BW_\rho^{GS}(0)=1$ を満たすように規格化することが要求されており、

$$\begin{aligned} d &= \frac{f(0)}{\Gamma_\rho M_\rho} \\ &= \frac{3}{\pi}\frac{m_\pi^2}{k^2(M_\rho^2)} ln \frac{M_\rho + 2k(M_\rho^2)}{2m_\pi} + \frac{M_\rho}{2\pi k(M_\rho^2)} - \frac{m_\pi^2 M_\rho}{\pi k^3(M_\rho^2)} \end{aligned} \tag{5.27}$$

と決められる。

パイオンの構造因子に対する K&S モデルと、G&S モデルでの相違点を考えると、この 2 つの Breit-Wigner モデルには

$$\begin{cases} (1) & \text{どちらも } F_\pi(0)=1 \text{ になるように規格化されている。} \\ (2) & \text{どちらのモデルも、} \rho \text{ のピーク付近においては同じような形をとる。} \end{cases}$$

といった一致点があげられる。しかしながら、同じ M_ρ、Γ_ρ を値として用いた場合、$s=M_\rho^2$ において G&S モデルのパイオン構造因子 F_π の値は K&S モデルの値よりも大きくなる傾向が見られる。

また、K&S モデルと、G&S モデルの両方で用いられている定数 β,γ は、それぞれ $\rho^{'}$,$\rho^{''}$ が支配的な共鳴状態である ρ に対してどれぐらいの割合なのかを示す値である。これまで書いた式においては、これらの値を実数として扱っていたが、実際には複素数であることが知られている[7]。
複素数としてこれらを取り扱うには、複素成分を表す係数として ϕ を導入し

$$\beta \to \beta \cdot e^{i\phi}$$

と置き換えることで行う。$\rho^{''}$ に対する値 γ についても同様にして複素数として取り扱うことができる。

[7] ρ,$\rho^{'}$,$\rho^{''}$ 間の位相差を考慮すると一般的には複素数で記述される

5.3.3 unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布と Breit-Wigner による fit

小節 5.3.1 で述べたデータを unfolding プログラムの入力として unfolding を実行した結果、図 5.14 にもあるように、rank は 8 となり、これを cutoff 変数として用いて結果を得た。ただし、unfolding に用いたのは以下の範囲に入ったデータのみである。

$$threshold \leq (M_{\pi\pi^0})^2 \leq 2.55(GeV)^2 \tag{5.28}$$

ここで、$threshold$ は、$(M_{\pi\pi^0})^2$ がとり得る最小値であり、本解析に用いた $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の場合 $\pi^\pm$ と π^0 の質量を合わせた値より $threshold = (M_{\pi^\pm} + M_{\pi^0})^2 = (0.140 + 0.135)^2 \backsimeq 0.076(GeV)^2$ となる。また、最大値は τ の質量となり $(M_{\pi\pi^0})^2_{max} = M_\tau^2 = (1.777)^2 \backsimeq 3.16(GeV)^2$ となるが、図 4.18 を見ても明らかなように $(M_{\pi\pi^0})^2 \geq 2.55(GeV)^2$ の範囲のデータは統計量が少ない上にバックグラウンドも多いことから、この範囲のデータは使用しないこととした。

unfolding した結果得られた分布に対して、前節で記述した 2 つの Breit-Wigner(K&S モデル , G&S モデル) を用いて fit したものが図 5.15 と図 5.16 である。また、この fit で得られた結果を表 5.3.3 に示した。fitting に用いた $(M_{\pi\pi^0})^2$ の範囲は unfolding したときと同様に式 5.28 の範囲である。よって、本解析の fitting には $\rho(1700)$ 共鳴状態は考慮しないものとし、$\rho(1700)$ に対する定数である γ はゼロに固定した[8]。
一方、$\rho(1450)$ 共鳴状態は考慮し、これに対する定数 β は

$$\begin{cases} \cdot\ \beta \text{ を実数として扱う} \\ \qquad \text{パイオン構造因子: } F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta}(BW_\rho + \beta BW_{\rho'}) \\ \cdot\ \beta \text{ を } \beta e^{i\phi} \text{ と置き換えることで複素数として扱う} \\ \qquad \text{パイオン構造因子: } F_\pi(s) = \frac{1}{1+\beta e^{i\phi}}(BW_\rho + \beta e^{i\phi} BW_{\rho'}) \end{cases}$$

の 2 つの場合を用いた。

これらの図と表から以下のことが言える。

- ρ だけを考慮して fit した時よりも $\rho + \rho'$ として fit した時の方が、明らかに分布を再現できる。ここからも $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊の中には、$\tau \to \rho\nu_\tau$ 崩壊だけでなく $\tau \to \rho'\nu_\tau$ も含まれているという事が確かめられた。
- 得られた値は 2 つの Breit-Wigner モデルの間で誤差の範囲で一致している。
- $\rho + \rho'$ として fit した時、β を実数として扱った場合と複素数成分 ϕ を入れて fit した場合では、$\phi \sim 180^\circ$ となり、一致した結果を示している。

さらに、以前に行われた他の実験結果との比較を表 5.3.3 で行った。他の実験においては、いずれも β を実数として扱っており、複素数成分は扱っていない。

[8] $\rho(1700)$: $(1.7_{GeV})^2 = 2.89_{(GeV)^2}$

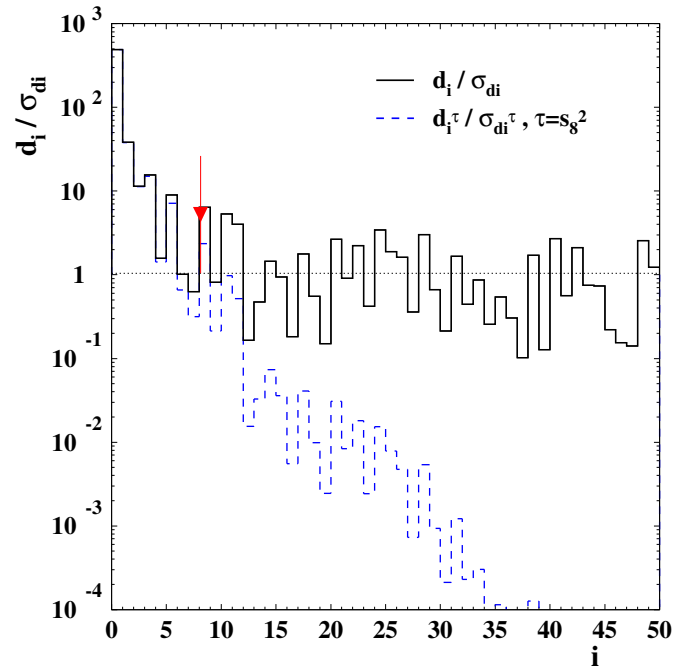

図 5.14: $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 図。 横軸に i、縦軸に $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ をとった図。図中の矢印は「 rank 」を示しており、今の場合 rank=8 となっている。ヒストグラムは実際の $log|\frac{d_i}{\sigma_{d_i}}|$ 分布であり、点線のヒストグラムは rank を考慮した場合の分布である。

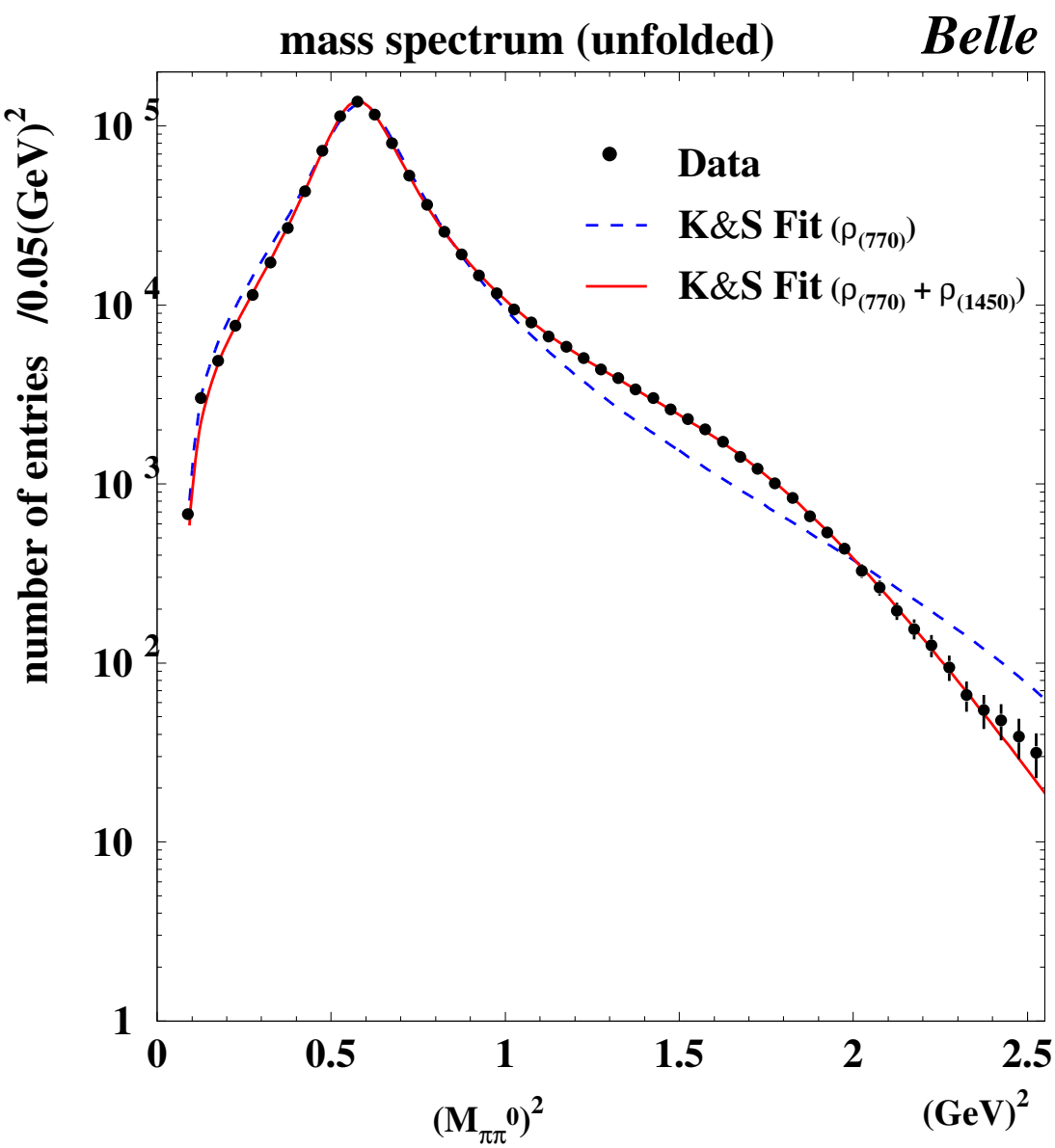

図 5.15: unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を K&S モデルで fit した図。 点がデータ、青の点線が $\rho(770)$ のみを考慮した場合、赤の線が $\rho(770) + \rho^{'}(1450)$ を考慮した場合の fit をそれぞれ示している。

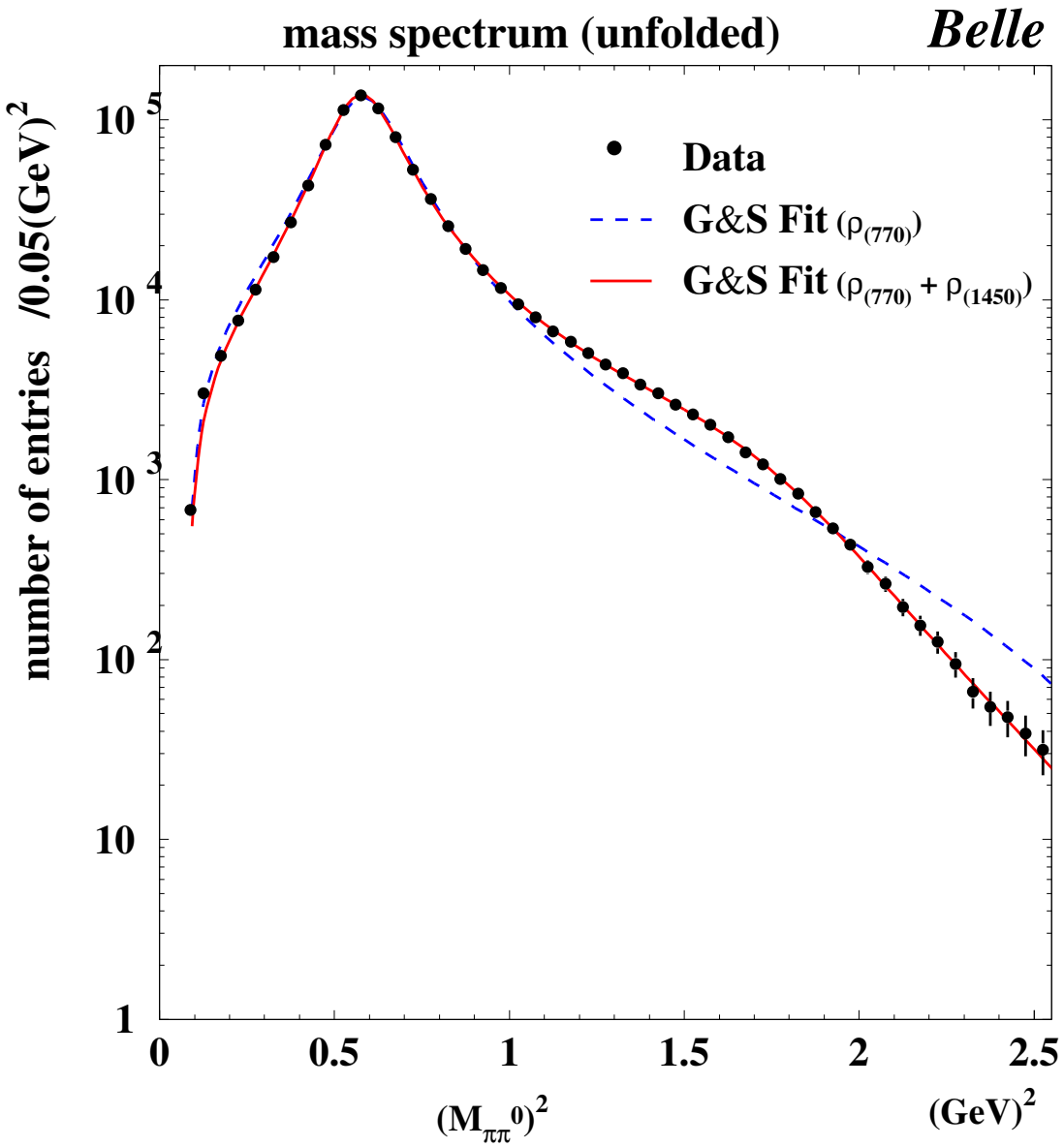

図 5.16: unfolding の結果得られた $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を G&S モデルで fit した図。 図 5.15 と同じく、点がデータ、青の点線が $\rho(770)$ のみの場合、赤の線が $\rho(770) + \rho'(1450)$ の場合をそれぞれ示している。

表 5.2: unfolding で得られた質量分布を fit した結果

	Kühn and Santamaria モデル			*Gounaris and Sakurai* モデル		
Fit 変数	ρ *only*	$\rho+\rho'$ (β *is real*)	$\rho+\rho'$ (β,ϕ *used*)	ρ *only*	$\rho+\rho'$ (β *is real*)	$\rho+\rho'$ (β,ϕ *used*)
M_ρ (MeV)	784.1 ±0.2	774.4 ±0.4	774.3 ±0.4	782.7 ±0.2	775.0 ±0.3	775.1 ±0.4
Γ_ρ (MeV)	164.7 ±0.6	151.2 ±0.7	151.3 ±0.7	165.1 ±0.6	153.0 ±0.7	153.0 ±0.7
$M_{\rho'}$ (MeV)		1396 ±6	1410 ±19		1399 ±6	1393 ±17
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)		476 ±24	489 ±30		429 ±24	422 ±29
β		-0.132 ±0.005	0.143 ±0.018		-0.097 ±0.004	0.094 ±0.009
ϕ		≡180.0 (fixed)	186.3 ±8.7		≡180.0 (fixed)	177.6 ±6.1
$\chi^2/d.o.f$	2114/46= 46.0	34.5/43= 0.80	33.8/42= 0.81	1447/46= 31.7	31.3/43= 0.73	31.2/42= 0.74

5.4 スペクトラル関数とパイオンの構造因子 分布

この節では、前節までで得た unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布からスペクトラル関数分布とパイオンの構造因子分布を求める。

5.4.1 スペクトラル関数 $(v^{\pi\pi}(s))$

スペクトラル関数は、2 章でも述べたように、unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布を用いて以下のように表すことができる。

$$v^{\pi\pi}(s)=\frac{M_\tau^2}{6|V_{ud}|^2S_{EW}}\frac{1}{\left(1-\frac{s}{M_\tau^2}\right)^2\left(1+\frac{2s}{M_\tau^2}\right)}\frac{B_{\pi\pi^0}}{B_e}\frac{1}{N_{\pi\pi^0}}\frac{dN_{\pi\pi^0}}{ds} \tag{5.29}$$

ここで、 $dN_{\pi\pi^0}$ が unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布であり、ds が bin の幅 $(0.05(GeV)^2)$、$N_{\pi\pi^0}$ が unfolding された $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布におけるデータ数の総和である。また、M_τ、S_{EW}、$|V_{ud}|$、B_e 、$B_{\pi\pi^0}$ については、用いた値を表 5.4 にまとめた。

これらを用いて求めたスペクトラル関数分布を図 5.17 に示した。ここで、同じ図上に plot したのは、CLEO 実験の値 [10] [9]であり、ここでも、2 つの実験の結果はよく合っていることがわかる。

[9]ただし、もともとの値は横軸に $M_{\pi\pi^0}$ をとった形となっていたので、$(M_{\pi\pi^0})^2$ に直し、我々の実験と比較できるようにした。

表 5.3: fit で得られた結果について他の実験との比較

Fitting の変数	*Belle*	*CLEO*	*ALEPH*
Kühn and Santamaria モデル			
M_ρ (MeV)	774.3 ± 0.4	774.9 ± 0.5	774.9 ± 0.9
Γ_ρ (MeV)	151.3 ± 0.7	149.0 ± 1.1	144.2 ± 1.5
$M_{\rho'}$ (MeV)	1410 ± 19	1364 ± 7	1363 ± 15
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)	489 ± 30	400 ± 26	≡ 310 (fixed)
$\lvert\beta\rvert$	0.143 ± 0.018	-0.108 ± 0.007	-0.094 ± 0.007
ϕ	186.3 ± 8.7	≡180.0 (fixed)	≡180.0 (fixed)
$\chi^2/d.o.f$	33.8 / 42	27.0 / 24	81 / 65
Gounaris and Sakurai モデル			
M_ρ (MeV)	775.1 ± 0.4	775.3 ± 0.5	776.4 ± 0.9
Γ_ρ (MeV)	153.0 ± 0.7	150.5 ± 1.1	150.5 ± 1.6
$M_{\rho'}$ (MeV)	1393 ± 17	1365 ± 7	1400 ± 16
$\Gamma_{\rho'}$ (MeV)	422 ± 30	356 ± 26	≡ 310 (fixed)
$\lvert\beta\rvert$	0.094 ± 0.009	-0.084 ± 0.006	-0.077 ± 0.008
ϕ	177.6 ± 6.1	≡180.0 (fixed)	≡180.0 (fixed)
$\chi^2/d.o.f$	31.2 / 43	26.8 / 24	54 / 65
fit-spectrum	$M^2_{\pi\pi^0}$	$M_{\pi\pi^0}$	$M^2_{\pi\pi^0}$
comment			$\rho''(1700)$ is included

表 5.4: スペクトラル関数の中で使われる値

定数	使用した値	参照
M_τ : τ の質量	1.77703 GeV	PDG
S_{EW} : 電弱相互作用に対する補正	1.0194	[6]
$\lvert V_{ud}\rvert$: CKM 行列の成分	0.9752	PDG
B_e : $\tau \to e\nu_e\nu_\tau$ の崩壊分岐比	0.1783	PDG
$B_{\pi\pi^0}$: $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ の崩壊分岐比	0.2541	[16]

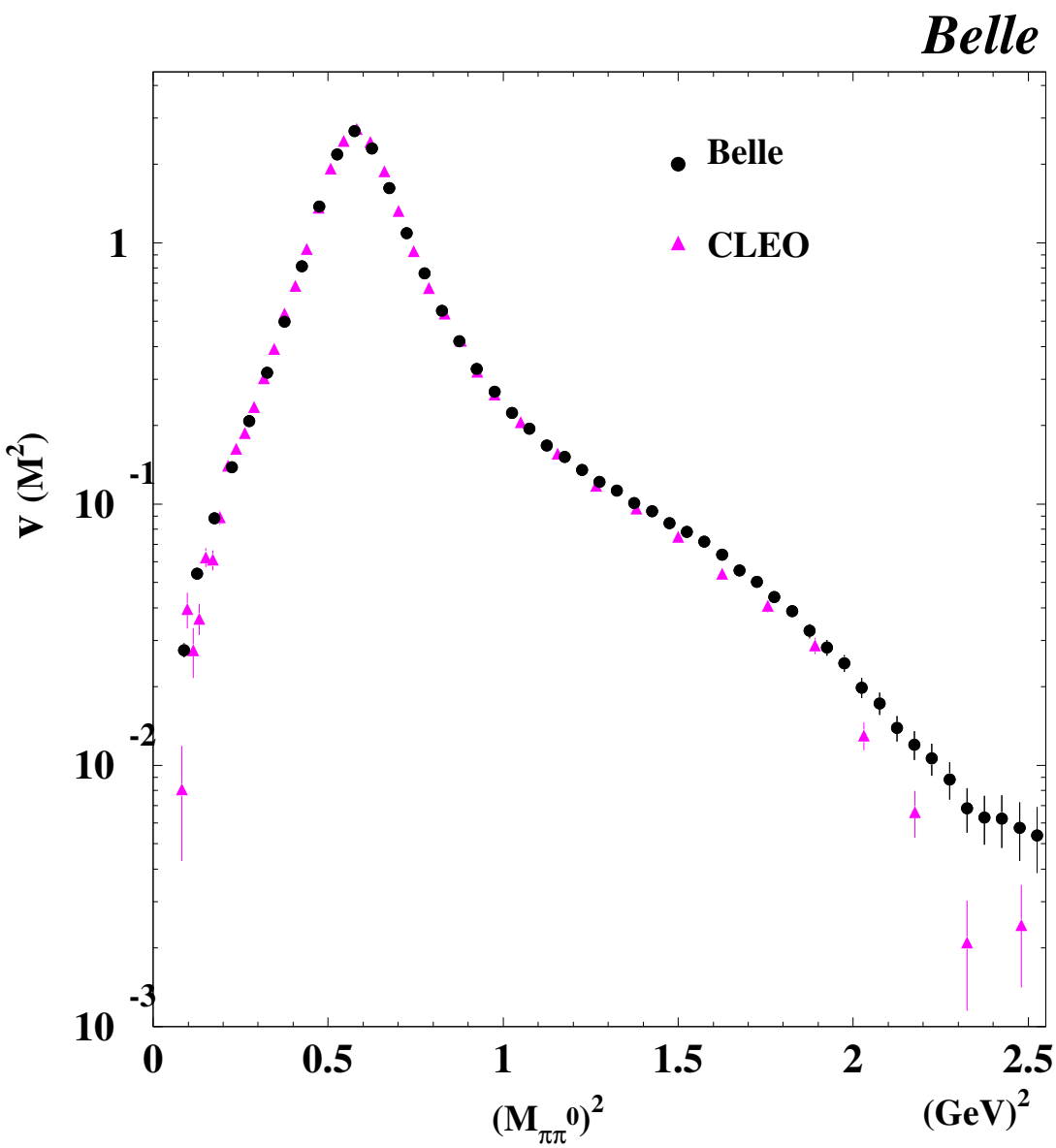

図 5.17: スペクトラル関数 $(v^{\pi\pi}(s))$ 分布。 黒の丸は Belle のデータを、ピンク色の三角は CLEO のデータをそれぞれ示す。

5.4.2 パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$)

次に、パイオンの構造因子分布をを求める。パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$) はペクトラル関数 ($v^{\pi\pi}(s)$) を用い以下のように表すことができ、これは π 粒子の電磁気的な項を示している。また、β_π は $\pi\pi$ の静止系における運動量の情報を含んだ要素である。このようにして求めたパイオンの構造因子分布を図 5.18 に示した。このパイオンの構造因子もまた、スペクトラル関数と並んでハドロン系の状態を記述するのに特徴的な要素である。

$$|F_\pi|^2 = \frac{12}{\beta_\pi^2} v^{\pi\pi^0}(s) \tag{5.30}$$

$$\beta_\pi(M) = \sqrt{\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} - m_{\pi^0})^2}{M^2}\right)\left(1 - \frac{(m_{\pi^+} + m_{\pi^0})^2}{M^2}\right)} \tag{5.31}$$

5.5 ミューオンの異常磁気モーメントのハドロン真空偏極項 ($a_\mu^{had,LO}$)

2 章でも述べたように、ミューオンの異常磁気モーメントの中で、一番不定性の多い項はハドロンの真空偏極に関する項 (a_μ^{had}) である。

$$a_\mu^{had} = a_\mu^{had,LO} + a_\mu^{had,HO} + a_\mu^{hab.LBL}$$

この中で τ のデータを用いて得られるのは、比較的エネルギーの低い ($a_\mu^{had,LO}$) 項であり、中でも本解析で用いた $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ のデータを用いて求められるのは $\pi\pi$ 系からの寄与 ($a_\mu^{\pi\pi}$) [10] である。これが以下のように表されることも 2 章で述べた。

$$a_\mu^{\pi\pi} = \frac{\alpha_{em}^2(0)}{\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{v^{\pi\pi}(s)}{s} K(s) ds \tag{5.32}$$

ここで、スペクトラル関数は式 5.29 の通りである。

今回は、積分を「Bin ごとの entry 数を足し上げる」という形で実行した。

$$a_\mu^{\pi\pi^0} = \sum_i f_i n_i^{\pi\pi} \Delta s_i \tag{5.33}$$

ここで、f_i は式 5.32 において定義した i 番目の Bin にかかる係数、$n_i^{\pi\pi}$ は i 番目の Bin の $(M_{\pi\pi^0})^2$ 分布の entry 数、Δs_i は Bin 幅である。

統計誤差については、error matrix($E_{i,j}$) を考慮して

$$\Delta a_\mu^{\pi\pi^0} = \sum_{i,j} \left(\frac{da_\mu}{dn_i}\right)\left(\frac{da_\mu}{dn_j}\right) E_{i,j} \tag{5.34}$$

[10] 2.2 節でも述べたように、これは終状態に π が 2 つあるような場合の寄与である。

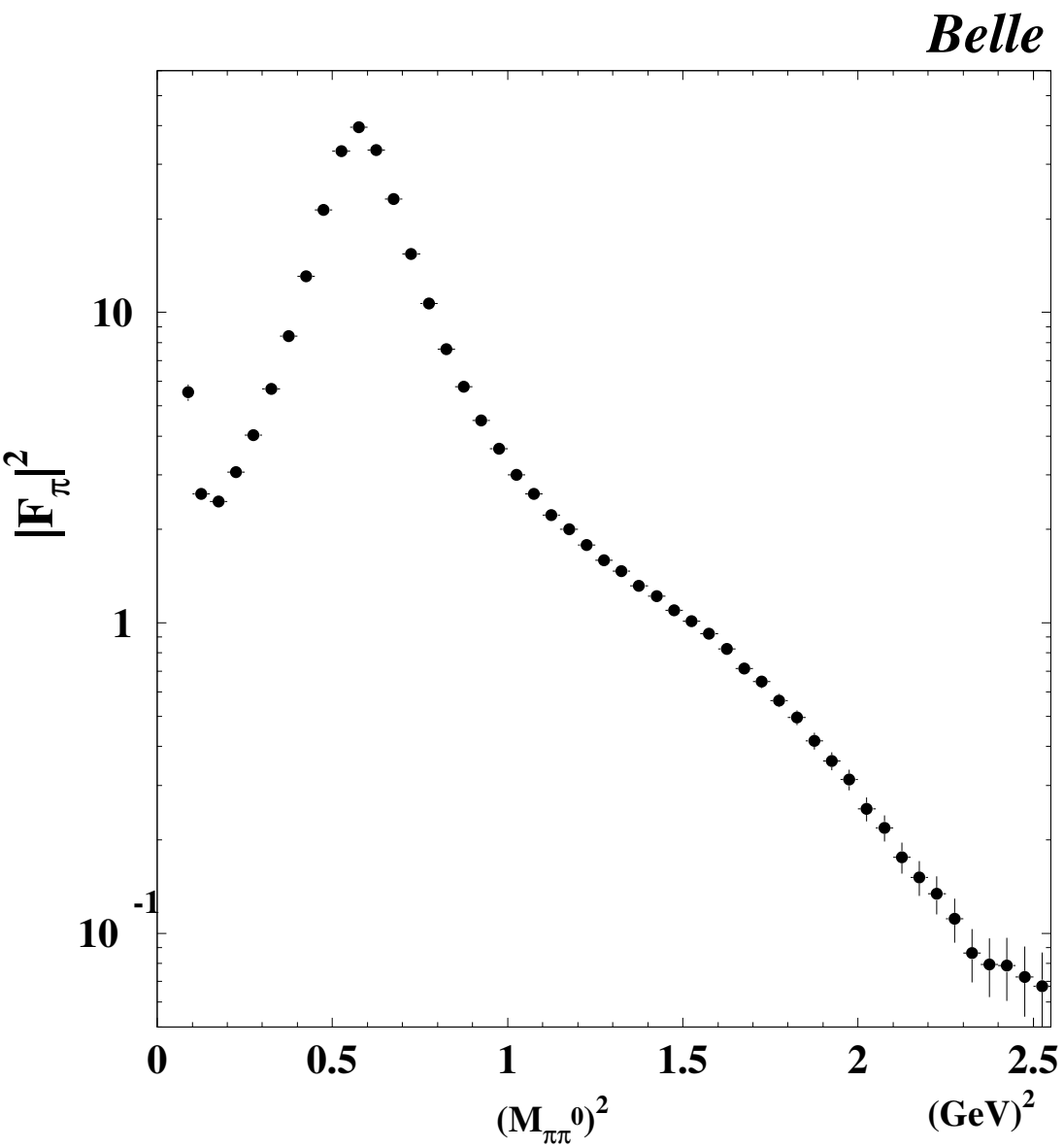

図 5.18: パイオンの構造因子 ($|F_\pi|^2$) 分布

とした。error matrix については、付録 C で図 C.2 に示した。この計算で用いたスペクトラル関数に含まれる係数は表 5.4 に示したものと同じである。

この計算の結果、以下の値を得た。

$$a_\mu^{\pi\pi^0} = (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \tag{5.35}$$

ALEPH、CLEO の実験のデータを合わせて出した結果 [6] と比較してみると

$$a_\mu^{\pi\pi} = \begin{cases} \text{ALEPH+CLEO} \quad [2m_\pi \leq M_{\pi\pi} < 1.80(GeV)] : & (527.73 \pm 3.38(stat) \pm 2.61(sys)) \times 10^{-10} \\ \text{Belle} \quad [(m_\pi + m_{\pi^0})^2 \leq M_{\pi\pi}^2 < 2.55(GeV)^2] : & (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \end{cases} \tag{5.36}$$

となり、他の実験と誤差の範囲で一致していることがわかった。式中の [ ] の中は積分範囲を表している。
ただし、ここで示した $a_\mu^{\pi\pi^0}$ には、アイソスピンを破ることによる補正はしていない。

第6章　結果と考察

KEKB 加速器において、Belle 実験が収集したデータを用いて、$\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 崩壊における $\pi\pi^0$ 系のスペクトラル関数の測定を行った。使用したデータは、Belle 実験で 2000 年 10 月から 2000 年 12 月までに収集された 4.44 /fb のデータであり、事象選別の結果、約 32 万個の $\tau \to \pi\pi^0\nu_\tau$ 事象を得た。

スペクトラル関数を求める前段階として、SVD unfolding 法を用いて $\pi\pi^0$ の不変質量分布求め、得られた分布に対して、Kühn & Santamaria モデルと Gounaris & Sakurai モデルの 2 つの Breit-Wigner 関数で fit をした。結果以下のことが観測された。

- ρ の要素に関しては、他の実験と非常によく一致している。

$$K\&S \begin{cases} M_\rho = 774.3 \ \pm 0.4 \ \ (MeV) \\ \Gamma_\rho = 151.2 \ \pm 0.7 \ \ (MeV) \end{cases} \quad G\&S \begin{cases} M_\rho = 775.1 \ \pm 0.4 (MeV) \\ \Gamma_\rho = 153.0 \ \pm 0.7 \ \ (MeV) \end{cases} \tag{6.1}$$

- $\rho^{'}$ の要素に関しては、他の実験との間に多少違いがみられる。

$$K\&S \begin{cases} M_\rho = 1410 \ \pm 19 \ \ (MeV) \\ \Gamma_\rho = 489 \ \pm 30 \ \ (MeV) \\ |\beta| = 0.143 \ \pm 0.018 \\ \phi = 186.3 \ \pm 8.7 \end{cases} \quad G\&S \begin{cases} M_\rho = 1393 \ \pm 17 \ \ (MeV) \\ \Gamma_\rho = 422 \ \pm 29 \ \ (MeV) \\ \beta = 0.094 \ \pm 0.009 \\ \phi = 177.6 \ \pm 6.1 \end{cases} \tag{6.2}$$

さらに、スペクトラル関数を得、これを積分することでミューオンの異常磁気モーメントの低いエネルギー領域におけるハドロンの真空偏極項のうち、終状態に π 粒子を 2 つ含む崩壊からの寄与 $\cdot\ a_\mu^{\pi\pi}$ を得た。

$$a_\mu^{\pi\pi} = (533.5 \pm 2.1(stat)) \times 10^{-10} \tag{6.3}$$

この値は、現在報告されている中で最も精度の高い値と誤差の範囲内で一致している。このことから、ハドロンの真空偏極項 $a_\mu^{\pi\pi}$ を得る過程で、検出器の性能を理解し、また、検出する際考慮すべき補正など基本的な振る舞いを精度よく理解できたといえる。しかしながら、この値に含まれる誤差は統計誤差のみである。さらに精密な測定のためにも、系統誤差の見積もりをすることが今後の課題となる。

また、今回本解析に用いたデータは、今現在 Belle 実験が持つデータの 1/20 ほどであり、高い統計のデータを用いる事でさらなる精度の向上が望まれる。